УДК 533.9

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОДЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. М. Алиев, М. Крамер

Исследованы спектры собственных электронных колебаний, локализованных в области сильной неоднородности плотной замагниченной плазмы. Для конкретного вида профиля плотности получены выражения для собственных функций и частот таких колебаний. В общем случае приведены квазиклассические спектры частот.

Рассмотрим неоднородную вдоль оси x плазму, находящуюся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z. Распределение потенциала $\Phi = \Phi(x)\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ подчиняется уравнению [1]:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + L_N^{-1}(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\frac{\epsilon_\|}{\epsilon_\perp}k_z^2 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}k_y L_N^{-1}(x) + k_y^2\right)\Phi = 0, \tag{1}$$

где $\epsilon_\|(x) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega^2}$, $\epsilon_\perp(x) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}$, $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$, ω_{pe} – электронная ленгмюровская частота, $L_N^{-1} = \frac{\partial \ln|\epsilon_\perp|}{\partial x}$. В (1) пренебрежено движением ионов, что справедливо для частот $\omega \gg \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$. Для функции

$$u(x) = \Phi(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int^x dx L_N^{-1}(x)\right) \tag{2}$$

уравнение (1) принимает форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y^2\left(-\frac{\epsilon_\|}{\epsilon_\perp}\frac{k_z^2}{k_y^2} - 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}(k_y L_N^{-1})^{-1} - \frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{\partial L_N(x)}{\partial x}\right)(k_y L_N)^{-2}\right)u = 0. \tag{3}$$

В низшем приближении геометрической оптики из (3) получаем уравнение для локального спектра частот

$$k_x^2(x) = -\frac{\epsilon_{\|}(x)}{\epsilon_{\perp}(x)}k_z^2 - k_y^2 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}k_y L_N^{-1}(x) + \frac{1}{4}L_N^{-2}\left(2\frac{\partial L_N(x)}{\partial x} - 1\right). \tag{4}$$

В области слабой неоднородности плотности, когда можно пренебречь последними двумя членами в (4), имеется зона непрозрачности по оси $x\,(k_x^2(x) < 0)$ для сильно вытянутых вдоль магнитного поля колебаний, удовлетворяющих условию $\dfrac{k_y^2}{k_z^2} > -\dfrac{\epsilon_{\|}(x)}{\epsilon_{\perp}(x)}$.

В области сильной неоднородности плазмы распространяющимися $(k_x^2(x) > 0)$ могут стать волны с отрицательным значением фазовой скорости вдоль оси y (в предположении, что $L_N > 0$). Проиллюстрируем такую возможность для случая внутренней волны $(k_z = 0)$ на примере плазмы, однородной в областях $x < 0\,(n = n_0)$ и $x > l\,(n = 2n_0)$. В переходной области $0 < x < l$ плотность плазмы линейно нарастает по закону $n(x) = n_0(1 + x/l)$. Для случая плотной плазмы $(\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2)$ в области частот $\omega_{ce} > \omega > \omega_{ci}$ уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - (k_y l)^2\left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega(k_y l)}\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4(k_y l)^2\zeta^2}\right)u = 0, \tag{5}$$

где переменная $\zeta = 1 + x/l$ меняется в пределах $1 < \zeta < 2$. В областях $\zeta < 1$ и $\zeta > 2$ поведение волн описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - (k_y l)^2 u = 0 \tag{6}$$

с решениями

$$\begin{aligned} u &= u_1 \exp(k_y l)(\zeta - 1) \text{ при } \zeta < 1, \\ u &= u_2 \exp(k_y l)(-\zeta + 2) \text{ при } \zeta > 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} &= (k_y l)u(1) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=2} &= -(k_y)u(2). \end{aligned} \tag{8}$$

В области частот $\omega \ll \omega_{ce}(k_y l)$ уравнение (5) принимает простую форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega_{ce}(k_y l)}{\omega}\frac{u}{\zeta} = 0. \tag{9}$$

$$k_x^2(x) = -\frac{\epsilon_{\|}(x)}{\epsilon_{\perp}(x)}k_z^2 - k_y^2 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}k_y L_N^{-1}(x) + \frac{1}{4}L_N^{-2}\left(2\frac{\partial L_N(x)}{\partial x} - 1\right). \quad (4)$$

В области слабой неоднородности плотности, когда можно пренебречь последними двумя членами в (4), имеется зона непрозрачности по оси $x\,(k_x^2(x) < 0)$ для сильно вытянутых вдоль магнитного поля колебаний, удовлетворяющих условию $\frac{k_y^2}{k_z^2} > -\frac{\epsilon_{\|}(x)}{\epsilon_{\perp}(x)}$.

В области сильной неоднородности плазмы распространяющимися $(k_x^2(x) > 0)$ могут стать волны с отрицательным значением фазовой скорости вдоль оси y (в предположении, что $L_N > 0$). Проиллюстрируем такую возможность для случая внутренней волны $(k_z = 0)$ на примере плазмы, однородной в областях $x < 0\,(n = n_0)$ и $x > l\,(n = 2n_0)$. В переходной области $0 < x < l$ плотность плазмы линейно нарастает по закону $n(x) = n_0(1 + x/l)$. Для случая плотной плазмы $(\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2)$ в области частот $\omega_{ce} > \omega > \omega_{ci}$ уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - (k_y l)^2\left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega(k_y l)}\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4(k_y l)^2\zeta^2}\right)u = 0, \quad (5)$$

где переменная $\zeta = 1 + x/l$ меняется в пределах $1 < \zeta < 2$. В областях $\zeta < 1$ и $\zeta > 2$ поведение волн описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - (k_y l)^2 u = 0 \quad (6)$$

с решениями

$$u = u_1 \exp(k_y l)(\zeta - 1) \text{ при } \zeta < 1,$$
$$u = u_2 \exp(k_y l)(-\zeta + 2) \text{ при } \zeta > 2. \quad (7)$$

Граничные условия имеют вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1} = (k_y l)u(1)$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=2} = -(k_y)u(2). \quad (8)$$

В области частот $\omega \ll \omega_{ce}(k_y l)$ уравнение (5) принимает простую форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega_{ce}(k_y l)}{\omega}\frac{u}{\zeta} = 0. \quad (9)$$

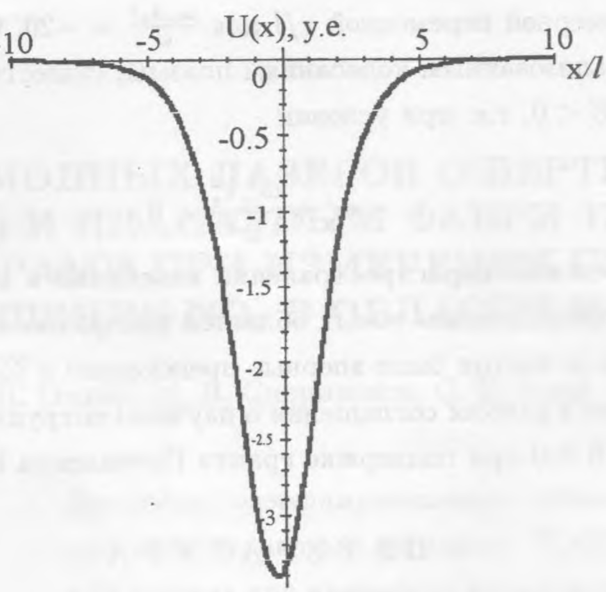

Рис. 1. *Вид потенциала для распределения плотности плазмы вида (12).*

Решениями уравнения (9) являются функции Бесселя первого порядка первого и второго рода $\sqrt{\zeta}Z_1(2\sqrt{-\omega_{ce}(k_y l)\zeta/\omega})$. Для нахождения спектра частот локализованных колебаний необходимо удовлетворить граничным условиям (7). Однако учитывая, что в уравнении (9) коэффициент $\left|\frac{\omega_{ce}(k_y l)}{\omega}\right|$ значительно превышает единицу, такой спектр с хорошей точностью совпадает с квазиклассическим спектром

$$\omega = -\omega_{ce}\frac{k_y}{l}\left(\frac{l\int\limits_1^2 \zeta^{-1/2}d\zeta}{\pi n}\right)^2. \tag{10}$$

Для качественного анализа возможности локализации колебаний удобно представить уравнение (1) в виде уравнения типа уравнения Шредингера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (E - U(x))u = 0, \tag{11}$$

где $E = -k_y^2 + \frac{\omega_{ce}^2 k_z^2}{\omega^2}$, $U(x) = \frac{\omega_{ce} k_y}{\omega}(L_N(x))^{-1} + \frac{1}{4}(L_N(x))^{-2}\left(1 - 2\frac{\partial L_N(x)}{\partial x}\right)$.

На рис. 1 представлен вид потенциала для гладкого распределения плотности плазмы,

$$n(x) = \frac{1 + 2\exp(x/l)}{1 + \exp(x/l)}n_0, \tag{12}$$

как функции безразмерной переменной x/l для $\frac{\omega_{ce}k_y l}{\omega} = -20$. Связанные состояния, соответствующие локализованным колебаниям плазмы, существуют при отрицательных значениях энергии $E < 0$, т.е. при условии

$$-k_y^2 + \frac{\omega_{ce}^2 k_z^2}{\omega^2} < 0, \tag{13}$$

соответствующем условию нераспространении колебаний в области однородной плазмы. Отметим, что возникновение новых областей прозрачности в неоднородной плазме в области геликоновых частот было впервые предсказано в [2].

Работа выполнена в рамках соглашения о научном сотрудничестве Russian–German Contract Nr. 436 RUS 590 при поддержке гранта Президента РФ НШ-1385.2003.2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы, М., Высшая школа, 1978.

[2] Гусаков Е. З., Ирзак М. А., Пилия А. Д. Письма в ЖЭТФ, **65**, 26 (1997).

Поступила в редакцию 28 февраля 2005 г.