УДК 533.951

ЗАТУХАНИЕ ИОННОГО ЗВУКА В ПЛАЗМЕ С ДВУМЯ СОРТАМИ ИОНОВ

К. Ю. Вагин, К. Н. Овчинников, В. П. Силин

Для плазмы с двумя сортами ионов в модели Батнагара–Гросса–Крука получено выражение для ионного вклада в продольную диэлектричекую проницаемость. В приближении, учитывающем столкновения ионов разного сорта, найден спектр и декремент затухания для ионного звука в высокочастотном и низкочастотном пределах. Приведены условия применимости полученных результатов.

Затухание ионного звука в плазме с двумя сортами ионов привлекло к себе внимание как благодаря экспериментальным исследованиям вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна [1], так и благодаря теоретической работе Эпперлейна, Шорта и Саймона [2], в которых было установлено проявление повышенной диссипации тогда, когда отношение заряда к массе различных ионных компонент не совпадает. В работе [2] были сообщены результаты численных расчетов по теории кинетических коэффициентов, которые позволили установить явное проявление различных отношений заряда к массе как меры влияния электрического поля на частицы в столкновительном затухании звука, могущего в существенной мере определяться джоулевым нагревом и термодиффузией. Работа [2] использовала кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау, что определило приближенность вычислений этой работы. В настоящем сообщении мы пойдем по пути использования точно решаемой кинетической модели, которая использует для описания столкновений ионов интеграл столкновений Батнагара–Гросса–Крука [3 – 5]. Такой подход позволяет получить общее выражение для ионного вклада в продольную диэлектрическую постоянную, описывающего как динамику, так и диссипацию, обусловленную ионами. При этом становится возможно на основе общего дисперсионного выражения рассматривать как бесстолкновительное, так и столкновительное приближения, а в случае столкновительного приближения проводить описание как низкочастотного, так и высокочастотного звука.

Будем рассматривать плазму, состоящую из электронов и двух сортов ионов. Используя модельный интеграл столкновений для ионов, запишем кинетические уравнения для ионов 1-го и 2-го сорта:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_1}{m_1}\mathbf{E}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}=-\nu_{11}(f_1-N_1\Phi_{11})-\nu_{12}(f_1-N_1\Phi_{12}),$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e_2}{m_2}\mathbf{E}\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}}=-\nu_{21}(f_2-N_2\Phi_{21})-\nu_{22}(f_2-N_2\Phi_{22}), \tag{1}$$

где e_α, m_α – заряд и масса ионов сорта α; $\nu_{\alpha\beta}$ – некоторые постоянные величины, имеющие смысл эффективных частот столкновений частиц сорта α с частицами сорта β. Для выполнения законов сохранения импульса и энергии необходимо выполнение равенств

$$m_\alpha N_\alpha \nu_{\alpha\beta}=m_\beta N_\beta \nu_{\beta\alpha}. \tag{2}$$

Ставя перед собой задачу определения затухания ионного звука в плазме, обусловленную столкновениями ионов, будем дальше интересоваться случаем, когда температура ионов двух сортов одинакова и равна T_0. Тогда частота рассеяния ионов первого сорта на ионах второго сорта имеет вид:

$$\nu_{12}=\frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\frac{e_1^2e_2^2N_2\Lambda}{(\kappa T_0)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}},$$

а частота рассеяния ионов второго сорта на ионах первого ν_{21} может быть получена заменой $1\leftrightarrow 2$ в последнем соотношении, при этом для полученных таким образом частот справедливы соотношения (2). Частоты столкновений одинаковых ионов между собой имеют вид:

$$\nu_{\alpha\alpha}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\frac{e_\alpha^4N_\alpha\Lambda}{m_\alpha^2V_{T\alpha}^3},$$

где $V_{T\alpha}=\sqrt{\kappa T_0/m_\alpha}$ – тепловая скорость ионов сорта α. Функции $\Phi_{\alpha\beta}$

$$\Phi_{\alpha\beta}=\frac{1}{(2\pi\kappa T_{\alpha\beta}/m_\alpha)^{3/2}}\exp\left[-\frac{m_\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{V}_\beta)^2}{2\kappa T_{\alpha\beta}}\right] \tag{3}$$

входят в систему (1), решение которой определяет следующие моменты:

$$N_\alpha=\int d\mathbf{v}f_\alpha, N_\alpha\mathbf{V}_\alpha=\int d\mathbf{v}\mathbf{v}f_\alpha, 3N_\alpha\kappa T_\alpha=m_\alpha\int d\mathbf{v}\left(\mathbf{v}-\mathbf{V}_\alpha\right)^2f_\alpha, T_{\alpha\beta}=\frac{m_\alpha T_\beta+m_\beta T_\alpha}{m_\alpha+m_\beta}. \tag{4}$$

В уравнениях (1) продольное электрическое поле $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ обусловлено ионно-звуковыми колебаниями.

На фоне равновесных значений, определенных как

$$\mathbf{V}_{\alpha 0} = 0, \quad T_{\alpha 0} = T_0, \quad \Phi_{\alpha\beta 0} = f_{\alpha 0}, \quad f_{\alpha 0} = \frac{N_{\alpha 0}}{(2\pi\kappa T_0/m_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha \mathbf{v}^2}{2\kappa T_0}\right), \tag{5}$$

будем рассматривать возмущения $\delta f_\alpha, \delta\varphi, \delta N_\alpha, \delta\mathbf{V}_\alpha, \delta T, \delta\Phi_{\alpha\beta}$, зависимость которых от координат и времени примем $\sim \exp(-i(\omega t - \mathbf{kr}))$. Возмущения температуры δT_α и возмущения скорости $\delta\mathbf{V}_\alpha$ приводят к следующему изменению значений функций Φ_{11} и Φ_{12}:

$$\Phi_{11} = \frac{f_{10}}{N_{10}}\left[1 + \frac{\delta T_1}{T_0}\left(\frac{m_1\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0} - \frac{3}{2}\right) + \frac{m_1}{\kappa T_0}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{V}_1)\right],$$

$$\Phi_{12} = \frac{f_{10}}{N_{10}}\left[1 + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\delta T_2}{T_0} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\delta T_1}{T_0}\right)\left(\frac{m_1\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0} - \frac{3}{2}\right) + \frac{m_1}{\kappa T_0}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{V}_2)\right]. \tag{6}$$

Линеаризуя первое уравнение (1) по малым возмущениям и используя (6), получаем уравнение, связывающее возмущение δf_1 и его моменты $\delta N_1, \delta T_1$ и $\delta\mathbf{V}_1$:

$$(\nu_{11} + \nu_{12} - i(\omega - \mathbf{kv}))\delta f_1 = f_{10}\left[-\frac{ie_1\delta\varphi}{\kappa T_0}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) + \right.$$

$$+\nu_{11}\left\{\frac{\delta N_1}{N_{10}} + \frac{\delta T_1}{T_0}\left(\frac{m_1\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0} - \frac{3}{2}\right) + \frac{m_1}{\kappa T_0}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{V}_1)\right\} + \tag{7}$$

$$\left. +\nu_{12}\left\{\frac{\delta N_1}{N_{10}} + \frac{m_1\delta T_2 + m_2\delta T_1}{T_0(m_1+m_2)}\left(\frac{m_1\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0} - \frac{3}{2}\right) + \frac{m_1}{\kappa T_0}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{V}_2)\right\}\right].$$

Уравнение, подобное (7), возникает при линеаризации второго уравнения (1). Интегрируя два эти уравнения с соответствующими весами, получаем алгебраическую систему уравнений для определения моментов $\delta N_\alpha, \delta\mathbf{V}_\alpha$ и δT_α. Введем следующие обозначения для безразмерных моментов:

$$Z_\alpha = \frac{\delta N_\alpha}{N_{\alpha 0}}, \quad X_\alpha = \frac{(\mathbf{k}, \delta\mathbf{V}_\alpha)}{k\sqrt{\kappa T_0/m_\alpha}}, \quad Y_\alpha = \frac{\delta T_\alpha}{T_0}. \tag{8}$$

Возмущение δN_α может быть записано в виде

$$\delta N_1 = \int d\mathbf{v}(f_{10} + \delta f_1) - N_{10} = \int d\mathbf{v}\delta f_1. \tag{9}$$

Выражая δf_1 с помощью уравнения (7) и подставляя в (9), получаем следующее соотношение:

$$Z_1 = -i\frac{e_1\delta\phi}{\kappa T_0}\left(\frac{1}{N_{10}}\int \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{k}, \mathbf{v})f_{10}}{\nu_{11} + \nu_{12} - i(\omega - \mathbf{kv})}\right) +$$

$$+(\nu_{11}+\nu_{12})Z_1\left(\frac{1}{N_{10}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{10}}{\nu_{11}+\nu_{12}-i(\omega-\mathbf{kv})}\right)+$$

$$+\left[\left(\nu_{11}+\nu_{12}\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)Y_1+\nu_{12}\frac{m_1}{m_1+m_2}Y_2\right]\times \tag{10}$$

$$\times\left(\frac{1}{N_{10}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{10}}{\nu_{11}+\nu_{12}-i(\omega-\mathbf{kv})}\left(\frac{m_1\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0}-\frac{3}{2}\right)\right)+$$

$$+\frac{m_1}{\kappa T_0}(\nu_{11}\delta\mathbf{V}_1+\nu_{12}\delta\mathbf{V}_2)\left(\frac{1}{N_{10}}\int\frac{d\mathbf{v}\,\mathbf{v}f_{10}}{\nu_{11}+\nu_{12}-i(\omega-\mathbf{kv})}\right).$$

Далее удобно использовать следующие обозначения:

$$\nu_1=\nu_{11}+\nu_{12},\quad \nu_2=\nu_{22}+\nu_{21}, \tag{11}$$

$$\tau_{NN}^{(\alpha)}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})},$$

$$\tau_{NV}^{(\alpha)}k\sqrt{\frac{\kappa T_0}{m_\alpha}}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}(\mathbf{k},\mathbf{v}),$$

$$\tau_{NT}^{(\alpha)}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}\left(\frac{m_\alpha\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0}-\frac{3}{2}\right), \tag{12}$$

$$\tau_{VV}^{(\alpha)}\frac{k^2\kappa T_0}{m_\alpha}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}(\mathbf{k},\mathbf{v})^2,$$

$$\tau_{VT}^{(\alpha)}k\sqrt{\frac{\kappa T_0}{m_\alpha}}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}(\mathbf{k},\mathbf{v})\left(\frac{m_\alpha\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0}-\frac{3}{2}\right),$$

$$\tau_{TT}^{(\alpha)}=\frac{1}{N_{\alpha0}}\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}\left(\frac{m_\alpha\mathbf{v}^2}{2\kappa T_0}-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Преобразуем интегралы в уравнении (10), содержащие $(\mathbf{v},\delta\mathbf{V}_\alpha)$. Предполагая, что вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси OZ, запишем следующее тождество:

$$(\mathbf{v},\delta\mathbf{V}_\alpha)=\frac{(\mathbf{k},\mathbf{v})}{k}\frac{(\mathbf{k},\delta\mathbf{V}_\alpha)}{k}+v\delta V_\alpha\sin\theta_v\sin\theta_{\delta V}\cos(\varphi_v-\varphi_{\delta V}).$$

В соответствии с последним соотношением получаем интегральное соотношение:

$$\int\frac{d\mathbf{v}f_{\alpha0}(\mathbf{v},\delta\mathbf{V}_\alpha)}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}=\frac{(\mathbf{k},\delta\mathbf{V}_\alpha)}{k^2}\int\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{k},\mathbf{v})f_{\alpha0}}{\nu_\alpha-i(\omega-\mathbf{kv})}. \tag{13}$$

Используя (13), можно получить алгебраические уравнения для определения моментов (8). Используя обозначения (11), (12) и соотношение (13), перепишем уравнение (10) в виде

$$Z_1(1-\nu_1\tau_{NN}^{(1)})-\left(\nu_{11}X_1+\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\nu_{12}X_2\right)\tau_{NV}^{(1)}-$$

$$-\left[\left(\nu_{11}+\nu_{12}\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)Y_1+\nu_{12}\frac{m_1}{m_1+m_2}Y_2\right]\tau_{NT}^{(1)}=-\frac{ie_1k\delta\varphi}{\sqrt{m_1\kappa T_0}}\tau_{NV}^{(1)}. \tag{14}$$

Все проделанные с первым уравнением (1) действия применяем ко второму уравнению (1). При этом получаем уравнение, аналогичное (14), и оно может быть получено из последнего заменой индексов $1\leftrightarrow 2$:

$$Z_2(1-\nu_2\tau_{NN}^{(2)})-\left(\nu_{22}X_2+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\nu_{21}X_1\right)\tau_{NV}^{(2)}-$$

$$-\left[\left(\nu_{22}+\nu_{21}\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)Y_2+\nu_{21}\frac{m_2}{m_1+m_2}Y_1\right]\tau_{NT}^{(2)}=-\frac{ie_2k\delta\varphi}{\sqrt{m_2\kappa T_0}}\tau_{NV}^{(2)}. \tag{15}$$

Возмущение $\delta\mathbf{V}_1$ определено соотношением

$$\delta\mathbf{V}_1=\frac{1}{N_{10}}\int d\mathbf{v}\,\mathbf{v}\delta f_1.$$

Подставляя сюда δf_1, определенное уравнением (7), находим уравнение

$$-\nu_1\tau_{NV}^{(1)}Z_1+X_1-\left(\nu_{11}X_1+\nu_{12}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}X_2\right)\tau_{VV}^{(1)}-$$

$$-\left(\nu_{11}Y_1+\frac{m_1Y_2+m_2Y_1}{m_1+m_2}\nu_{12}\right)\tau_{VT}^{(1)}=-\frac{ie_1k\delta\varphi}{\sqrt{m_1\kappa T_0}}\tau_{VV}^{(1)}. \tag{16}$$

Замена $1\leftrightarrow 2$ в уравнении (16) позволяет получить еще одно уравнение:

$$-\nu_2\tau_{NV}^{(2)}Z_2+X_2-\left(\nu_{22}X_2+\nu_{21}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}X_1\right)\tau_{VV}^{(2)}-$$

$$-\left(\nu_{22}Y_2+\nu_{21}\frac{m_1Y_2+m_2Y_1}{m_1+m_2}\right)\tau_{VT}^{(2)}=-\frac{ie_2k\delta\varphi}{\sqrt{m_2\kappa T_0}}\tau_{VV}^{(2)}. \tag{17}$$

Оставшиеся уравнения для определения безразмерных моментов X_α, Y_α и Z_α получим из соотношения (4), определяющего температуру T_α. Оставляя только слагаемые, линейные по малым возмущениям, получим соотношение

$$3N_{10}T_0\kappa\left(\frac{\delta T_1}{T_0}+\frac{\delta N_1}{N_{10}}\right)=m_1\int d\mathbf{v}\,v^2\delta f_1. \tag{18}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{3}{2}N_{10}\frac{\delta T_1}{T_0} = \int\left(\frac{m_1 v^2}{2\kappa T_0} - \frac{3}{2}\right) d\mathbf{v}\,\delta f_1, \qquad (19)$$

из которого вытекает следующее уравнение:

$$-\nu_1\tau_{NT}^{(1)}Z_1 - \left(\nu_{11}X_1 + \nu_{12}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}X_2\right)\tau_{VT}^{(1)} +$$

$$+\frac{3}{2}Y_1 - \left(\nu_{11}Y_1 + \nu_{12}\frac{m_2Y_1 + m_1Y_2}{m_1+m_2}\right)\tau_{TT}^{(1)} = -\frac{ie_1k\delta\varphi}{\sqrt{m_1\kappa T_0}}\tau_{VT}^{(1)}. \qquad (20)$$

Произведя перестановку индексов $1 \leftrightarrow 2$, из уравнения (20) получаем последнее шестое уравнение для безразмерных моментов:

$$-\nu_2\tau_{NT}^{(2)}Z_2 - \left(\nu_{22}X_2 + \nu_{21}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}X_1\right)\tau_{VT}^{(2)} +$$

$$+\frac{3}{2}Y_2 - \left(\nu_{22}Y_2 + \nu_{21}\frac{m_2Y_1 + m_1Y_2}{m_1+m_2}\right)\tau_{TT}^{(2)} = -\frac{ie_2k\delta\varphi}{\sqrt{m_2\kappa T_0}}\tau_{VT}^{(2)}. \qquad (21)$$

В полученной системе шести уравнений (14)–(17),(20),(21), содержащей 6 неизвестных X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1 и Z_2, коэффициенты определяются формулами (12). Все эти коэффициенты записываются в явном виде с помощью функции

$$J_+(z) = ze^{-z^2/2}\int\limits_{+i\infty}^{z} d\tau\, e^{\tau^2/2} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}ze^{-z^2/2}\left\{1 + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z d\tau\, e^{\tau^2/2}\right\} = -i\sqrt{\pi}2zw\left(z/\sqrt{2}\right), \qquad (22)$$

где $w(z)$ – интеграл вероятности [6].

Коэффициенты τ записываются в виде:

$$\tau_{NN}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha}J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right). \qquad (23)$$

$$\tau_{NV}^{(\alpha)} = \frac{i}{kV_{T\alpha}}\left\{J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right) - 1\right\}. \qquad (24)$$

$$\tau_{NT}^{(\alpha)} = \frac{i}{2(\omega + i\nu_\alpha)}\left\{\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right)^2\left[J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right) - 1\right] - J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right)\right\}. \qquad (25)$$

$$\tau_{VV}^{(\alpha)} = \frac{i}{kV_{T\alpha}}\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\left\{J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right) - 1\right\}. \qquad (26)$$

$$\tau_{VT}^{(\alpha)} = \frac{i}{2kV_{T\alpha}}\left\{\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right)^2\left[J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right) - 1\right] - J_+\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}}\right)\right\}. \qquad (27)$$

$$\tau_{TT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \right)^4 - 2 \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \right)^2 + 5 \right] J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \right) + \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \right)^2 + \left(\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \right)^4 \right\}. \tag{28}$$

Сравнивая отношения (23)–(28) между собой, получим следующие полезные соотношения:

$$\begin{gathered} \tau_{NV}^{(\alpha)} = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \tau_{NN}^{(\alpha)} - \frac{i}{kV_{T\alpha}}, \\ \tau_{NT}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \tau_{NV}^{(\alpha)} - \tau_{NN}^{(\alpha)} \right], \\ \tau_{VV}^{(\alpha)} = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \tau_{NV}^{(\alpha)}, \\ \tau_{VT}^{(\alpha)} = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}} \tau_{NT}^{(\alpha)}. \end{gathered} \tag{29}$$

Укажем здесь разложения для значений параметров τ (23)–(28) в условиях $kV_{T\alpha} \ll |\omega + i\nu_\alpha|$

$$\begin{gathered} \tau_{NN}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell}, \\ \tau_{NV}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell+1} \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell+1}, \\ \tau_{NT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \ell \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell}, \\ \tau_{VV}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell+1} \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell}, \\ \tau_{VT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell+1} \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) (\ell + 1) \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell+1}, \\ \tau_{TT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\sqrt{\pi}(\omega + i\nu_\alpha)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell \Gamma\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \left(\ell^2 + \ell + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{kV_{T\alpha}}{\omega + i\nu_\alpha} \right)^{2\ell}. \end{gathered} \tag{30}$$

Вернемся к системе алгебраических уравнений для определения Z_α, Y_α и X_α. После введения новых обозначений

$$\nu_{11} X_1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \nu_{12} X_2 = \mathsf{X}_1,$$

$$\nu_{22} X_2 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \nu_{21} X_1 = \mathsf{X}_2,$$

$$\nu_{11}Y_1 + \nu_{12}\frac{m_2Y_1 + m_1Y_2}{m_1 + m_2} = \mathsf{Y}_1,$$
$$\nu_{22}Y_2 + \nu_{21}\frac{m_2Y_1 + m_1Y_2}{m_1 + m_2} = \mathsf{Y}_2, \tag{31}$$

запишем систему уравнений (14)–(17), (20), (21), разбитую на две тройки в виде:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1-\nu_\alpha\tau_{NN}^{(\alpha)})Z_\alpha \; - \; \tau_{NV}^{(\alpha)}\mathsf{X}_\alpha \; - \; \tau_{NT}^{(\alpha)}\mathsf{Y}_\alpha & = & -\frac{ie_\alpha k\delta\varphi}{\sqrt{m_\alpha\kappa T_0}}\tau_{NV}^{(\alpha)}, \\ -\nu_\alpha\tau_{NV}^{(\alpha)}Z_\alpha + X_\alpha - \tau_{VV}^{(\alpha)}\mathsf{X}_\alpha - \tau_{VT}^{(\alpha)}\mathsf{Y}_\alpha & = & -\frac{ie_\alpha k\delta\varphi}{\sqrt{m_\alpha\kappa T_0}}\tau_{VV}^{(\alpha)}, \\ -\nu_\alpha\tau_{NT}^{(\alpha)}Z_\alpha - \tau_{VT}^{(\alpha)}\mathsf{X}_\alpha + \frac{3}{2}Y_\alpha - \tau_{TT}^{(\alpha)}\mathsf{Y}_\alpha & = & -\frac{ie_\alpha k\delta\varphi}{\sqrt{m_\alpha\kappa T_0}}\tau_{VT}^{(\alpha)}. \end{array}\right. \tag{32}$$

Из первых уравнений двух троек (32) выражаем X_α

$$\mathsf{X}_\alpha = \frac{1-\nu_\alpha\tau_{NN}^{(\alpha)}}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}Z_\alpha + \frac{\tau_{NT}^{(\alpha)}}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}\mathsf{Y}_\alpha + \frac{ie_\alpha k\delta\varphi}{\sqrt{m_\alpha\kappa T_0}}, \tag{33}$$

и исключаем X_α из двух последних уравнений (32):

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{\nu_\alpha C_\alpha + \tau_{VV}^{(\alpha)}}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}Z_\alpha + X_\alpha + \frac{B_\alpha}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}\mathsf{Y}_\alpha & = & 0, \\ -\frac{\nu_\alpha D_\alpha + \tau_{VT}^{(\alpha)}}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}Z_\alpha + \frac{3}{2}Y_\alpha - \frac{A_\alpha}{\tau_{NV}^{(\alpha)}}\mathsf{Y}_\alpha & = & 0. \end{array}\right. \tag{34}$$

При записи системы уравнений (34) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \tau_{TT}^{(\alpha)}\tau_{NV}^{(\alpha)} - \tau_{NT}^{(\alpha)}\tau_{VT}^{(\alpha)}, \\ B_\alpha &= \tau_{VV}^{(\alpha)}\tau_{NT}^{(\alpha)} - \tau_{NV}^{(\alpha)}\tau_{VT}^{(\alpha)}, \\ C_\alpha &= \tau_{NV}^{(\alpha)}\tau_{NV}^{(\alpha)} - \tau_{NN}^{(\alpha)}\tau_{VV}^{(\alpha)}, \\ D_\alpha &= \tau_{NT}^{(\alpha)}\tau_{NV}^{(\alpha)} - \tau_{NN}^{(\alpha)}\tau_{VT}^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{35}$$

В соответствии с соотношениями (29) $B_\alpha \equiv 0$, а $C_\alpha \equiv -i\tau_{NV}^{(\alpha)}/kV_{T\alpha}$. Эти результаты позволяют из первых уравнений (34) получить

$$X_\alpha = Z_\alpha\frac{\omega}{kV_{T\alpha}} = Z_\alpha S_\alpha. \tag{36}$$

Будем рассматривать вторые уравнения в системах (34). Учитывая, что Y_α выражаются через Y_α, эти уравнения образуют систему для определения Y_α через Z_α

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta_1 Y_1 + \Xi_1 Y_2 & = & Z_1\left[\nu_1 D_1 + \tau_{VT}^{(1)}\right], \\ -\Xi_2 Y_1 + \Delta_2 Y_2 & = & Z_2\left[\nu_2 D_2 + \tau_{VT}^{(2)}\right]. \end{array}\right. \tag{37}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Xi_1 = A_1 \frac{m_1 \nu_{12}}{m_1 + m_2}, \quad \Xi_2 = A_2 \frac{m_2 \nu_{21}}{m_1 + m_2},$$

$$\Delta_1 = \frac{3}{2}\tau_{NV}^{(1)} - A_1 \left[\nu_{11} + \frac{\nu_{12} m_2}{m_1 + m_2}\right], \tag{38}$$

$$\Delta_2 = \frac{3}{2}\tau_{NV}^{(2)} - A_2 \left[\nu_{22} + \frac{\nu_{21} m_1}{m_1 + m_2}\right].$$

В соответствии с сотношениями (29) получаем $D_\alpha = -i\tau_{NT}^{(\alpha)}/kV_{T\alpha}$, и следовательно, правую часть в уравнениях (37) можно преобразовать к виду

$$\nu_\alpha D_\alpha + \tau_{VT}^{(\alpha)} = \frac{\omega}{kV_{T\alpha}} \tau_{NT}^{(\alpha)}. \tag{39}$$

Вводя обозначения для правых частей уравнений (37) $K_\alpha = (\omega/kV_{T\alpha})\tau_{NT}^{(\alpha)}$, из системы уравнений (37) выразим Y_α через Z_α:

$$Y_1 = \frac{Z_1 K_1 \Delta_2 + Z_2 K_2 \Xi_1}{\Delta_1 \Delta_2 - \Xi_1 \Xi_2},$$

$$Y_2 = \frac{Z_2 K_2 \Delta_1 + Z_1 K_1 \Xi_2}{\Delta_1 \Delta_2 - \Xi_1 \Xi_2}. \tag{40}$$

Соотношения (36) и (40) позволяют выразить комбинации X_α и Y_α через Z_α:

$$\mathsf{Y}_1 = \frac{Z_1 K_1}{\Delta_1 \Delta_2 - \Xi_1 \Xi_2} \left\{\Delta_2 \left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12} m_1}{m_1 + m_2}\right) + \Xi_2 \frac{\nu_{12} m_1}{m_1 + m_2}\right\} +$$

$$+ \frac{Z_2 K_2}{\Delta_1 \Delta_2 - \Xi_1 \Xi_2} \left\{\Delta_1 \frac{\nu_{12} m_1}{m_1 + m_2} + \Xi_1 \left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12} m_2}{m_1 + m_2}\right)\right\}. \tag{41}$$

$$\mathsf{X}_1 = \nu_{11} S_1 Z_1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \nu_{12} S_2 Z_2.$$

Выражения X_2 и Y_2 через Z_α могуть быть получены из соотношений (41) заменой $1 \leftrightarrow 2$.

Вернемся к анализу первых уравнений из двух "троек" (32). С учетом выражений (41) эти два уравнения представляют замкнутую систему для определения Z_α:

$$\begin{cases} Q_{11} Z_1 - Q_{12} Z_2 & = & -\frac{ie_1 k\delta\varphi}{\sqrt{m_1 \kappa T_0}} \tau_{NV}^{(1)}, \\ -Q_{21} Z_1 + Q_{22} Z_2 & = & -\frac{ie_2 k\delta\varphi}{\sqrt{m_2 \kappa T_0}} \tau_{NV}^{(2)}. \end{cases} \tag{42}$$

Здесь коэффициенты Q_{ij} имеют вид:

$$Q_{11} = 1 - \nu_1 \tau_{NN}^{(1)} - \nu_{11} S_1 \tau_{NV}^{(1)} - \frac{K_1 \tau_{NT}^{(1)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_2\left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12} m_2}{m_1 + m_2}\right) + \Xi_2 \frac{\nu_{12} m_1}{m_1 + m_2}\right\}, \quad (43)$$

$$Q_{12} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\nu_{12} S_2 \tau_{NV}^{(1)} + \frac{K_2 \tau_{NT}^{(1)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_1 \frac{\nu_{12} m_1}{m_1 + m_2} + \Xi_1\left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12} m_2}{m_1 + m_2}\right)\right\}, \quad (44)$$

$$Q_{22} = 1 - \nu_2 \tau_{NN}^{(2)} - \nu_{22} S_2 \tau_{NV}^{(2)} - \frac{K_2 \tau_{NT}^{(2)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_1\left(\nu_{22} + \frac{\nu_{21} m_1}{m_1 + m_2}\right) + \Xi_1 \frac{\nu_{21} m_2}{m_1 + m_2}\right\}, \quad (45)$$

$$Q_{12} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\nu_{21} S_1 \tau_{NV}^{(2)} + \frac{K_1 \tau_{NT}^{(2)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_2 \frac{\nu_{21} m_2}{m_1 + m_2} + \Xi_2 \frac{\nu_{21} m_1}{m_1 + m_2}\right\}, \quad (46)$$

Z_α – обезразмеренные их равновесными значениями флуктуации плотности ионов сорта α. Знание флуктуации плотности ионного заряда позволяет получить выражение для ионного вклада в диэлектрическую проницаемость

$$\delta\varepsilon_i = -\frac{4\pi\delta\rho_i}{k^2\delta\varphi_i}, \qquad \delta\rho_i = e_1 N_{10} Z_1 + e_2 N_{20} Z_2 \quad (47)$$

в виде

$$\delta\varepsilon_i = \frac{i}{k}\frac{1}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}}\left\{\frac{\omega_{L1}^2}{V_{T1}}\tau_{NV}^{(1)} Q_{22} + \frac{\omega_{L2}^2}{V_{T2}}\tau_{NV}^{(2)} Q_{11} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\pi e_1 e_2 N_{10}}{m_2 V_{T2}}\tau_{NV}^{(2)} Q_{12} + \frac{4\pi e_1 e_2 N_{20}}{m_1 V_{T1}}\tau_{NV}^{(1)} Q_{21}\right\}, \quad (48)$$

где $\omega_{L\alpha} = \sqrt{4\pi e_\alpha^2 N_{\alpha 0}/m_\alpha}$ – ленгмюровская частота ионов сорта α.

Получим разложение выражения (48) в пределе малых k. Будем использовать обозначение $x_\alpha = kV_{T\alpha}/(\omega + i\nu_\alpha)$. Согласно формулам (30) можно получить следующие разложения при $x_\alpha \ll 1$:

$$\tau_{NN}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha}\left\{1 + x_\alpha^2 + x_\alpha^4 + \dots\right\},$$

$$\tau_{NV}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha}x_\alpha\left\{1 + 3x_\alpha^2 + 15x_\alpha^4 + \dots\right\},$$

$$\tau_{NT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha}x_\alpha^2\left\{1 + 6x_\alpha^2 + \dots\right\}, \quad (49)$$

$$\tau_{VT}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega + i\nu_\alpha}x_\alpha\left\{1 + 6x_\alpha^2 + 45x_\alpha^4 \dots\right\},$$

$$\tau_{TT}^{(\alpha)} = \frac{3i}{2(\omega + i\nu_\alpha)}\left\{1 + \frac{7}{3}x_\alpha^2 + 15x_\alpha^4 \dots\right\},$$

$$\tau_{VV}^{(\alpha)} = \frac{3i}{2(\omega + i\nu_\alpha)}\left\{1 + 3x_\alpha^2 + 15x_\alpha^4 ...\right\}.$$

Разложения (49) позволяют для параметра A_α (35) получить разложение в виде

$$A_\alpha = \frac{x_\alpha}{(\omega + i\nu_\alpha)^2}\left\{\frac{3}{2} - 7x_\alpha^2 - \frac{87}{2}x_\alpha^4 + ...\right\}, \tag{50}$$

а для параметров Δ_α и Ξ_α (38) в виде

$$\Xi_1 = -\frac{3}{2}\frac{m_1\nu_{12}}{m_1 + m_2}\frac{x_1}{(\omega + i\nu_1)^2}\left(1 + \frac{14}{3}x_1^2\right) \tag{51}$$

$$\Delta_1 = \frac{3}{2}\frac{x_1}{(\omega + i\nu_1)^2}\left(i\omega + \frac{x_1^2}{3}(9i\omega + 5\nu_1)\right) + \Xi_1.$$

Выражения для Δ_2 и Ξ_2 могут быть получены из (51) заменой $1 \leftrightarrow 2$. Формулы (51) позволяют получить разложение комбинации $\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2$ в виде

$$\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2 = \frac{9}{4}\frac{k^2 V_{T1} V_{T2}}{(\omega + i\nu_1)^3(\omega + i\nu_2)^3}\left\{-(\omega + i\nu_m)\left[\omega + x_1^2\left(3\omega - \frac{5}{3}i\nu_1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_2^2\left(3\omega - \frac{5}{3}i\nu_2\right)\right] - \frac{5}{3}i\frac{k^2\kappa T_0}{m_1 + m_2}\left(\frac{\nu_{12}}{\omega + i\nu_1} + \frac{\nu_{21}}{\omega + i\nu_2}\right)\right\}. \tag{52}$$

В формуле (52) использовано следующее обозначение

$$\nu_m = \frac{m_1\nu_{12} + m_2\nu_{21}}{m_1 + m_2}. \tag{53}$$

Подставим разложения дробей, входящих в коэффициенты Q_{ij} (43)–(46):

$$\frac{K_1\tau_{NT}^{(1)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_2\left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12}m_2}{m_1 + m_2}\right) + \Xi_2\frac{m_1\nu_{12}}{m_1 + m_2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{k^2 V_{T1}^2}{(\omega + i\nu_1)^3}\frac{1}{\omega + i\nu_m}\left\{i\omega\left(\nu_{11} + \frac{m_2\nu_{12}}{m_1 + m_2}\right) - \frac{m_2\nu_{21}\nu_1}{m_1 + m_2}\right\}, \tag{54}$$

$$\frac{K_2\tau_{NT}^{(1)}}{\Delta_1\Delta_2 - \Xi_1\Xi_2}\left\{\Delta_1\frac{m_1\nu_{12}}{m_1 + m_2} + \Xi_1\left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12}m_2}{m_1 + m_2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{k^2 V_{T1}^2}{(\omega + i\nu_1)^2}\frac{i}{\omega + i\nu_m}\frac{m_1\nu_{12}}{m_1 + m_2}. \tag{55}$$

Соотношения (54)–(55) позволяют записать выражения для Q_{11} и Q_{12} в следующем виде:

$$Q_{11} = \frac{\omega(\omega + i\nu_{12})}{(\omega + i\nu_1)^2} - \frac{x_1^2}{\omega + i\nu_1}\left\{i\nu_1 + \frac{3i\nu_{11}\omega}{\omega + i\nu_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\omega + i\nu_m}\left[i\omega\left(\nu_{11} + \frac{\nu_{12}m_2}{m_1 + m_2}\right) - \frac{m_2\nu_{21}\nu_1}{m_1 + m_2}\right]\right\}, \tag{56}$$

$$Q_{12} = \frac{i\omega\nu_{12}}{(\omega + i\nu_1)^2}\left(1 + 3x_1^2\right) + \frac{2}{3}\frac{ix_1^2}{\omega + i\nu_m}\frac{m_1\nu_{12}}{m_1 + m_2}.$$

Заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ из выражений (56) можно получить формулы для Q_{22} и Q_{21}. Исходя из формул (56), запишем выражение для знаменателя $Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}$ в формуле для диэлектрической проницаемости (48) в виде:

$$Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = \frac{\omega}{(\omega + i\nu_1)^2(\omega + i\nu_2)^2}\left\{\nu_{12}\nu_{21}\left[3\omega x_1^2 + 3\omega x_2^2 + \frac{4}{3}\frac{k^2\kappa T_0}{(m_1 + m_2)(\omega + i\nu_m)}\right] - \right.$$

$$-\omega^3 + (\omega + i\nu_{21})\left(\omega^2 + ix_1^2\left[-\frac{5}{3}\nu_1(\omega + i\nu_1) + \frac{2}{3}\frac{m_1\nu_{12}(\omega + i\nu_1)^2}{(m_1 + m_2)(\omega + i\nu_m)} - 3\omega\nu_{11}\right]\right) + \tag{57}$$

$$\left. +(\omega + i\nu_{12})\left(\omega^2 + ix_2^2\left[-\frac{5}{3}\nu_2(\omega + i\nu_2) + \frac{2}{3}\frac{m_2\nu_{21}(\omega + i\nu_2)^2}{(m_1 + m_2)(\omega + i\nu_m)} - 3\omega\nu_{22}\right]\right)\right\}.$$

Выполненное выше разложение формулы (48) по малым параметрам x_1, x_2 позволяет в нулевом приближении по x_α получить следующее выражение для $\delta\varepsilon_i$:

$$\delta\varepsilon_i = -\frac{\omega_{L1}^2(\omega + i\nu_{21}) + \omega_{L2}^2(\omega + i\nu_{12}) + 4\pi i e_1 e_2 N_{10}N_{20}(2\nu_0/\rho_m)}{\omega^2(\omega + i(\nu_{12} + \nu_{21}))}. \tag{58}$$

Для удобства дальнейшего изложения, используя соотношение (2), введем определение частоты ν_0:

$$\nu_{21} = m_1 N_{10}(\nu_0/\rho_m), \qquad \nu_{12} = m_2 N_{20}(\nu_0/\rho_m). \tag{59}$$

В соответствии с (59) $\nu_{12} + \nu_{21} = \nu_0$ ($\rho_m = m_1N_{10} + m_2N_{20}$ – массовая плотность ионов), формулу (58) перепишем в виде:

$$\delta\varepsilon_i = -\frac{\omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2 + 4\pi i(\nu_0/\omega)(\rho_i/\rho_m)^2}{\omega(\omega + i\nu_0)}. \tag{60}$$

Выделяя действительную и мнимую части в последнем выражении, получаем

$$\delta\varepsilon_i = -\frac{\omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2 + 4\pi(\nu_0/\omega)^2(\rho_e^2/\rho_m)}{\omega^2 + \nu_0^2} + 4\pi i\frac{\nu_0}{\omega}\frac{m_1m_2N_{10}N_{20}}{\rho_m(\omega^2 + \nu_0^2)}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2. \tag{61}$$

Условия применимости формул (58)–(61) в низкочастотной области имеют вид

$$\omega \ll \nu_\alpha, \qquad \frac{kV_{T\alpha}}{\nu_\alpha} \ll 1, \tag{62}$$

а в высокочастотной

$$\omega \gg \nu_\alpha, \qquad \frac{kV_{T\alpha}}{\omega} \ll 1. \tag{63}$$

Полученные приближенные выражения (58)–(61) также не учитывают (в отличие от формулы (48)) вклада от бесстолкновительного затухания звука на ионах

$$\varepsilon_{i\ell} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{\omega\omega_{L\alpha}^2}{k^3 V_{T\alpha}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 V_{T\alpha}^2}\right), \tag{64}$$

существенного при $\omega \gg \nu_\alpha$ и $kV_{T\alpha} \gg \nu_\alpha$. Такой подход оправдан в условиях, когда описываемая последним слагаемым в (61) диссипация, обусловленная столкновениями ионов разных сортов, превосходит бесстолкновительный диссипативный вклад (64)

$$4\pi \frac{\nu_0}{\omega} \frac{N_{10} N_{20} m_1 m_2}{\rho_m(\omega^2 + \nu_0^2)} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \gg \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{\omega\omega_{L\alpha}^2}{k^3 V_{T\alpha}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 V_{T\alpha}^2}\right).$$

Формулы (58)–(61) решают вопрос о нахождении вклада ионов в продольную диэлектрическую проницаемость, обусловленную столкновениями ионов разного сорта. Вклад от столкновений ионов одного сорта возникнет при учете слагаемых следующего порядка малости по параметру $k^2 V_{T\alpha}^2/(\omega^2 + \nu_\alpha^2) \ll 1$ в разложении общего результата (48).

Ионный вклад в диэлектрическую проницаемость (61) описывает как динамику, так и диссипацию ионов. На основе полученных формул (58)–(61) становится возможным изучение свойств звука, когда ионная диссипация определяется столкновениями ионов, а не бесстолкновительным затуханием звука на ионах. Считая электронную диссипацию бесстолкновительной, дисперсионное уравнение для продольных ионно-звуковых колебаний запишем в виде

$$\frac{1}{k^2 r_{De}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kV_{Te}}\right) + \delta\varepsilon_i = 0, \tag{65}$$

где V_{Te} – тепловая скорость электронов. Используя найденное выражение для ионного вклада в диэлектрическую проницаемость для решения дисперсионного уравнения (65), получим следующие выражения для спектра ионного звука в плазме с двумя сортами ионов в низкочастотном и высокочастотном пределах

$$\omega_s = \begin{cases} k\overline{V}_s, & \omega \ll \nu_\alpha, \\ kV_s, & \omega \gg \nu_\alpha, \end{cases} \tag{66}$$

где $\overline{V}_s = r_{De}\sqrt{4\pi\rho_e^2/\rho_m}$ – скорость длинноволнового звука; $V_s = r_{De}\sqrt{\omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2}$ – скорость коротковолнового звука. Выражения для затухания ионного звука имеют вид

$$\gamma_s = \gamma_e + \gamma_i$$

$$\gamma_s/\omega_s = \begin{cases} (k\overline{V}_s/2\nu_0)(V_s^2/\overline{V}_s^2 - 1), & \omega \ll \nu_\alpha, \\ (\nu_0/2kV_s)(1 - \overline{V}_s^2/V_s^2), & \omega \gg \nu_\alpha, \end{cases}$$

$$\gamma_e/\omega_s = \begin{cases} \sqrt{\pi/8}k\overline{V}_s/V_{Te}, & \omega \ll \nu_\alpha, \\ \sqrt{\pi/8}kV_s/V_{Te}, & \omega \gg \nu_\alpha. \end{cases} \qquad (67)$$

Развитый в настоящем сообщении подход, проиллюстрированный нами в случае столкновений заряженных частиц, рассеяние которых описывается формулой Резерфорда, пригоден и для иных случаев. Например, он может быть использован и тогда, когда рассматриваются неполностью ионизованные плазмы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке CRDF (грант RP1-2268), РФФИ (проект 02-02-16047), а также в рамках программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект 00-15-96720).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fernandez J.C., Cobble J.A., Failor B.H. et al. Phys. Rev., **E55**(3), 2747 (1996).

[2] Epperlein E.M., Short R.W., Simon A. Phys. Rev., **E49**(3), 2480 (1994).

[3] Bhatnagar P., Gross E., Krook M. Phys. Rev., **94**, 511 (1954).

[4] Gross E., Krook M. Phys. Rev., **102**, 593 (1956).

[5] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы, М., Высшая школа, 1988, с. 54.

[6] Справочник по специальным функциям, под редакцией М. Абрамовица, И. Стиган, М., Наука, 1979, с. 120.

Поступила в редакцию 2 апреля 2002 г.