УДК 533.951

О ШИРИНЕ ЛИНИИ ВРМБ В ПЛАЗМЕ С ДВУМЯ СОРТАМИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

К. Ю. Вагин, К. Н. Овчинников, В. П. Силин

В сравнительно широком интервале интенсивностей накачки получена простая формула для ширины смещения частоты поля рассеянного излучения относительно частоты поля накачки при ВРМБ, когда нелинейный закон имеет корневую зависимость от превышения интенсивности над порогом параметрической неустойчивости. Ширина линии ВРМБ может существенно превышать декремент затухания ионного звука.

В работах [1, 2] рассматривалась ширина линии спектра ВРМБ в полностью ионизованной плазме с ионами двух сортов. При этом рассматривалась бесстолкновительная плазма. Было показано, что уже на пороге ВРМБ неустойчивости возможно возникновение сравнительно широкой линии [1]. В работе [2] на примере углерод-водородной плазмы показано как изменяется ширина линии ВРМБ при изменении степени неизотермичности и соотношения концентраций ионных компонент плазмы. В отличие от работ [1, 2] излагаемое ниже посвящено теории ширины ВРМБ линии в плазме, столкновения ионов которой играют определяющую роль.

В 1994 году Эпперлейн, Шорт и Саймон [3] показали, что в теории звуковых волн в плазме с легкими и тяжелыми ионами, в пределе сильно столкновительной плазмы, когда спектр и затухание волн отвечают гидродинамическому пределу, важную роль играют эффекты, обусловленные различием отношений заряда к массе для ионов различных сортов. В работе [3] авторы использовали следствия кинетического уравнения с обычным интегралом столкновений Фоккера–Планка–Ландау. Результаты работы [3] относятся к такому пределу, когда длина свободного пробега ионов мала по сравнению с длиной звуковых волн, а частота звука мала по сравнению с частотами столкновений ионов. Эти результаты интересны для теории вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ), в которой проявляется новая, выявленная в работе [3] диссипация.

В настоящем сообщении, посвященном теории ширины линии ВРМБ в плазме, имеющей два сорта ионов, легких и тяжелых, рассматривается сильностолкновительный предел для ионов, в то время как электроны будут считаться бесстолкновительными. При этом нас будет интересовать не только тот гидродинамический предел, которому была посвящена работа [3], но также и предел частот звука, бóльших ионных частот столкновений. При этом столкновительная диссипация ионов будет доминирующей. Для такого случая в работе [4] с помощью интеграла столкновений Батнагара–Гросса–Крука [5] было получено сравнительно простое выражение для продольной диэлектрической постоянной, которое мы используем далее.

Вслед за работой [4] при рассмотрении ионно-звуковых волн будем, с одной стороны, полностью пренебрегать вкладом электрон-ионных столкновений в диэлектрическую постоянную. То есть будем считать, что вклад электронов в продольную диэлектрическую постоянную имеет вид

$$\delta\epsilon_e(\omega,k)=\frac{1}{k^2r_{De}^2}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kV_{Te}}\right), \tag{1.1}$$

где r_{De} – дебаевский радиус электронов, $V_{Te}=\sqrt{\kappa_B T_e/m_e}$ – тепловая скорость электронов. В (1.1) принято, что скорость ионного звука мала по сравнению с тепловой скоростью электронов. С другой стороны, вклад ионов в диэлектрическую постоянную $\delta\epsilon_i(\omega,k)$ будем считать столкновительным. При этом для интересующего нас случая плазмы с двумя сортами ионов, главным диссипативным вкладом от ионных столкновений, вслед за работой [4], будем считать вклад, определяющийся разностью отношений зарядов и масс ионов. Тогда имеем

$$\delta\epsilon_i(\omega,k)=-\frac{\omega^2\omega_L+\bar{\omega}_L^2\nu_0^2}{\omega^2(\omega^2+\nu_0^2)}+i\frac{\nu_0}{\omega}\frac{\omega_L^2-\bar{\omega}_L^2}{\omega^2+\nu_0^2}. \tag{1.2}$$

Выражение (1.2) не учитывает столкновения между ионами одного сорта, и входящая в (1.2) частота ν_0 включает только вклады от столкновений ионов разного сорта.

$$\nu_0=\nu_{12}+\nu_{21}, \tag{1.3}$$

где

$$\nu_{12} = \frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\frac{e^4 Z_1^2 Z_2^2 N_2 \Lambda}{(\kappa_B T_i)^{3/2}}\sqrt{\frac{M_2}{M_1(M_1+M_2)}}, \quad \nu_{21} = \frac{M_1 N_1}{M_2 N_2}\nu_{12}, \tag{1.4}$$

где κ_B – постоянная Больцмана. В выражении (1.2) использованы обычные обозначения для ионных ленгмюровских частот ионов в плазме с двумя сортами ионов

$$\omega_L^2 = \omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2 = 4\pi e^2 \left(\frac{Z_1^2 N_1}{M_1} + \frac{Z_2^2 N_2}{M_2}\right), \tag{1.5}$$

и обозначение

$$\bar{\omega}_L^2 = 4\pi e^2 \frac{(Z_1 N_1 + Z_2 N_2)^2}{M_1 N_1 + M_2 N_2}. \tag{1.6}$$

Заметим, что благодаря соотношению

$$\frac{\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2}{\bar{\omega}_L^2} = \frac{N_1 M_1 N_2 M_2}{(Z_1 N_1 + Z_2 N_2)^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \tag{1.7}$$

диссипативный вклад в (1.2) пропорционален квадрату разности отношений зарядов ионов к их массе (ср. [4]). В формулах (1.1), (1.2) k и ω – волновой вектор и частота звуковой волны, $N_\alpha, Z_\alpha, M_\alpha$ – плотность, кратность ионизации и масса ионов сорта α соответственно. Формула (1.2) получена в предположениях $T_i = T_1 = T_2$ и в пренебрежении столкновениями одинаковых ионов между собой.

В низкочастотном гидродинамическом пределе, когда в соответствии с работой [4] выполнено условие

$$\omega \ll \min\{\nu_1, \nu_2\} \leq \nu_0, \tag{1.8}$$

где

$$\nu_\alpha \equiv \nu_{\alpha 1} + \nu_{\alpha 2} \tag{1.9}$$

частота столкновений ионов сорта α, учитывающая как столкновения ионов разных сортов (1.4), так и столкновения ионов одного сорта

$$\nu_{\alpha\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\frac{e^4 Z_\alpha^4 N_\alpha \Lambda}{(\kappa_B T_i)^{3/2}\sqrt{M_\alpha}}, \tag{1.10}$$

выражение (1.2) принимает вид

$$\delta\epsilon_i(\omega,k) = -\frac{\bar{\omega}_L^2}{\omega^2}\left(1 - i\frac{\omega}{\nu_0}\frac{\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2}{\bar{\omega}_L^2}\right). \tag{1.11}$$

В таком гидродинамическом пределе формулы (1.1) и (1.11) позволяют с помощью дисперсионного уравнения

$$\delta\epsilon_e(\omega,k) + \delta\epsilon_i(\omega,k) = 0 \tag{1.12}$$

записать необходимые для нашего рассмотрения следующие выражения для частоты ω_S

$$\omega_S = k\bar{v}_S, \tag{1.13}$$

и декремента затухания γ_S звука

$$\gamma_S = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_i. \tag{1.14}$$

Здесь

$$\bar{v}_S = \bar{\omega}_L r_{De} \tag{1.15}$$

скорость звука в низкочастотном пределе (1.8),

$$\bar{\gamma}_e = \sqrt{\pi/8}(k\bar{v}_S^2/v_{Te}) \tag{1.16}$$

бесстолкновительный декремент затухания Ландау низкочастотного звука на электронах,

$$\bar{\gamma}_i = (k^2\bar{v}_S^2/2\nu_0)(\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2)/\bar{\omega}_L^2 \tag{1.17}$$

декремент затухания низкочастотного звука, обусловленный столкновениями ионов разных сортов.

В высокочастотном пределе [4], когда справедливо

$$\omega \gg \max\{\nu_1, \nu_2\} \geq \nu_0, \tag{1.18}$$

ионный вклад (1.2) в диэлектрическую постоянную имеет вид

$$\delta\epsilon_i(\omega,k) = -\frac{\omega_L^2}{\omega^2}\left(1 - i\frac{\nu_0}{\omega}\frac{\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2}{\omega_L^2}\right). \tag{1.19}$$

В этом случае уравнение (1.12) дает для ω_S и декремента затухания γ_S звука

$$\omega_S = kv_S, \tag{1.20}$$

$$\gamma_S = \gamma_e + \gamma_i, \tag{1.21}$$

где

$$v_S = \omega_L r_{De} \tag{1.22}$$

скорость звука в высокочастотном пределе (1.18),

$$\gamma_e = \sqrt{\pi/8}(kv_S^2/v_{Te}) \tag{1.23}$$

бесстолкновительный декремент затухания Ландау высокочастотного звука на электронах, а

$$\gamma_i = (\nu_0/2)(\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2)/\omega_L^2 \tag{1.24}$$

декремент затухания высокочастотного звука, обусловленный столкновениями ионов разных сортов.

Подчеркнем, что как в низкочастотном (1.8), так и в высокочастотном пределе (1.18) декремент затухания звука мал по сравнению с его частотой

$$\gamma_S \ll \omega_S. \tag{1.25}$$

ВРМБ неустойчивость. Используем постановку задачи, отвечающую развитию ВРМБ неустойчивости во времени. В основу такого описания ВРМБ положим следующее дисперсионное уравнение [6, 7]:

$$\frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega,k)} + \frac{1}{\delta\epsilon_e(\omega,k)} =$$

$$= \frac{k^2|[\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]|^2}{4(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2\{c^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2 - (\omega-\omega_0)^2\epsilon_{tr}(\omega-\omega_0, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\}}, \tag{2.1}$$

где ω_0 и $\mathbf{k}_0$ – частота и волновой вектор падающей электромагнитной волны; $\omega_0 - \omega$ и $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ – частота и волновой вектор рассеянной волны; ω и $\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор участвующей в ВРМБ звуковой моды; $\mathbf{v}_E = e\mathbf{E}_0/m_e\omega_0$ – скорость осцилляций электрона в поле падающей волны; ϵ_{tr} – поперечная диэлектрическая проницаемость, определяемая следующим выражением:

$$\epsilon_{tr}(\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)=1-\frac{\omega_{Le}^2}{(\omega-\omega_0)^2}\left(1-i\frac{\nu_{ei}}{\omega-\omega_0}\right),$$

где

$$\nu_{ei}=\frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\frac{e^4(Z_1^2N_1+Z_2^2N_2)\Lambda}{(\kappa_BT_e)^{3/2}\sqrt{m_e}}=\frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\frac{e^4n_e\Lambda}{(\kappa_BT_e)^{3/2}\sqrt{m_e}}\frac{Z_1^2N_1+Z_2^2N_2}{Z_1N_1+Z_2N_2} \tag{2.2}$$

частота столкновений электронов с ионами. В уравнение (2.1) входит комплексная частота $\omega\to\omega+i\gamma$, где γ – временной инкремент звуковой моды, а значит и связанной с ней рассеянной волны. Везде далее ω – вещественная величина.

Используя представление о частотной расстройке резонанса, в соответствии с работами [1, 2] знаменатель в правой части уравнения (2.1) можно записать в обычном виде

$$(\omega-\omega_0)^2Re[\epsilon_{tr}(\omega-\omega_0,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)]-c^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2=2\omega_0\Delta, \tag{2.3}$$

где Δ характеризует величину частотной расстройки параметрического резонанса.

В дальнейшем будем рассматривать развитие ВРМБ неустойчивости во времени с инкрементом

$$\gamma\ll\omega. \tag{2.4}$$

Тогда, подставляя выражения (1.1) для $\delta\epsilon_e$ и (1.11) или (1.19) для $\delta\epsilon_i$ в уравнение (2.1) и используя (2.3), получим следующую систему уравнений для определения Δ и γ, справедливую как в низкочастотном (1.8), так и в высокочастотном (1.18) пределах:

$$\frac{\omega^2}{\omega_S^2}-1=I\gamma_E\frac{\Delta}{\Delta^2+(\gamma+\gamma_E)^2}, \tag{2.5}$$

$$2\frac{\gamma+\gamma_S}{\omega_S}=I\gamma_E\frac{\gamma+\gamma_E}{\Delta^2+(\gamma+\gamma_E)^2}. \tag{2.6}$$

Здесь $\gamma_E=\nu_{ei}\omega_{Le}^2/2\omega_0^2$ – декремент затухания поперечной электромагнитной волны, обусловленный ее поглощением при электрон-ионных столкновениях,

$$I=\frac{\omega_0}{\nu_{ei}}\frac{|[\mathbf{k}-\mathbf{k}_0,\ \mathbf{v}_E]|^2}{4(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2v_{Te}^2} \tag{2.7}$$

безразмерная интенсивность накачки. Уравнения (2.5), (2.6) записаны в линейном приближении по малым согласно неравенствам (1.25) и (2.4) параметрам γ_S/ω_S и γ/ω.

Уравнения (2.5) и (2.6) определяют следующим образом расстройку резонанса

$$\Delta = (\gamma + \gamma_E)\frac{\omega^2 - \omega_S^2}{2\omega_S(\gamma + \gamma_S)}. \tag{2.8}$$

Соответственно возникает следующее уравнение для инкремента γ:

$$\frac{\gamma + \gamma_E}{\gamma_E}\left[\frac{(\omega^2 - \omega_S^2)^2}{2\omega_S^3(\gamma + \gamma_S)} + \frac{2(\gamma + \gamma_S)}{\omega_S}\right] = I. \tag{2.9}$$

Отсюда в частном случае $\gamma = 0$ имеем уравнение для границы области неустойчивости:

$$\frac{(\omega^2/\omega_S^2 - 1)^2}{2\gamma_S/\omega_S} + 2\gamma_S/\omega_S = I. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) описывает ширину ВРМБ линии. Оно дает зависимось частоты ω на границе области ВРМБ неустойчивости от интенсивности накачки I. В линейном приближении по малому параметру $\gamma_S/\omega_S \ll 1$ из (2.10) имеем на пороге неустойчивости (ср. [6]):

$$I = I_{th} = 2\frac{\gamma_S}{\omega_S}, \tag{2.11}$$

$$\omega = \omega_{th} \cong \omega_S. \tag{2.12}$$

Эти формулы позволяют для частоты на границе области ВРМБ неустойчивости записать следующее соотношение:

$$\omega_{b\pm} = \omega_{th} \pm \gamma_S\sqrt{I/I_{th} - 1}. \tag{2.13}$$

Формула (2.13) применима в весьма широкой области значений интенсивности полей накачки

$$I_{th} \le I \ll \omega_S/\gamma_S. \tag{2.14}$$

Следует отметить, что, согласно уравнению (2.9), инкремент ВРМБ неустойчивости γ как функция интенсивности накачки I положителен в области частот, удовлетворяющих неравенству $\omega_{b-} \le \omega \le \omega_{b+}$.

Ширина линии ВРМБ, согласно формуле (2.12), определяется соотношением

$$\Delta\omega \equiv \omega_{b+} - \omega_{b-} = 2\gamma_S\sqrt{I/I_{th} - 1}. \tag{2.15}$$

При больших превышениях порога ($I \gg I_{th}$) ширина линии растет как квадратный корень из интенсивности поля накачки.

Для того, чтобы уточнить область применимости формулы (2.13), остановимся на выражении для инкремента. Чтобы не загромождать наше изложение, рассмотрим инкремент ВРМБ неустойчивости при $\omega = \omega_{th} = \omega_S$, когда уравнение (2.9) дает

$$\gamma = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(\gamma_S - \gamma_E)^2 + 2\gamma_E\omega_S I} - (\gamma_S + \gamma_E)\right\}. \tag{2.16}$$

В пределе достаточно высокой надпороговости имеем

$$\gamma = \sqrt{\gamma_E\omega_S I/2}. \tag{2.17}$$

Согласно (2.17) видно, что использованное нами условие малости инкремента ВРМБ неустойчивости по сравнению с частотой ионного звука (2.4) сводится в рассматриваемом случае к неравенству

$$I \ll \omega_S/\gamma_E, \tag{2.18}$$

которое при $\gamma_E > \gamma_S$ может быть более существенным по сравнению с правым неравенством формулы (2.14).

В заключение этого раздела обсудим как может влиять частотная расстройка (2.8) на величину волнового вектора $\mathbf{k}$ участвующей в ВРМБ звуковой моды. Обычно (см., например, [6, 7]) для определения $\mathbf{k}$ используют уравнение (2.3) с правой частью, равной нулю. Покажем, что учет конечной величины Δ приводит лишь к малым поправкам в величине волнового вектора $\mathbf{k}$. Так, на пороге ВРМБ неустойчивости относительное влияние частотной расстройки (2.8) на величину волнового вектора будет характеризоваться малой величиной $(\gamma_E/\omega_0)(\gamma_S/\omega_S) \ll 1$, представляющей собой произведение малых отношений декрементов затухания к частотам соответственно электромагнитной и звуковой волн. При значительном превышении порога неустойчивости величина частотной расстройки (2.8) максимальна вблизи границы области неустойчивости и составляет $\Delta \cong (\gamma_E/\gamma_S)\Delta\omega/2$. Тогда с учетом (2.15) в рамках наиболее жесткого из условий (2.14), (2.18) относительное влияние частотной расстройки на величину волнового вектора ограничено сверху величиной

$$(\omega_S/\omega_0)\cdot\min\left[\sqrt{\gamma_E/\gamma_S},\ \gamma_E/\gamma_S\right] \ll 1. \tag{2.19}$$

Действительно, при $\gamma_E < \gamma_S$ условие (2.19) выполняется автоматически. Если же $\gamma_E > \gamma_S$, то $(\omega_S/\omega_0)\sqrt{\gamma_E/\gamma_S} \le (\omega_S/\omega_0)\sqrt{\gamma_E/\gamma_e} \sim \sqrt{(v_{Te}/c)(\gamma_E/\omega_0)} \ll 1$. Таким образом частотная расстройка приводит к малым поправкам в величине волнового вектора **k**.

Условия применимости нашего рассмотрения ограничиваются условиями применимости исходных формул (1.1) и (1.2). В этой связи приближение бесстолкновительного описания электронов, приводящее к формуле (1.1), налагает на величину волнового вектора условие снизу

$$k\ell_{ei} \gg 1, \tag{2.20}$$

где $\ell_{ei} = v_{Te}/\nu_{ei}$ – длина свободного пробега электронов относительно их столкновений с ионами. В свою очередь, формула (1.2) получена в работе [4] в старшем порядке разложения общего выражения для $\delta\epsilon_i$ по малым параметрам

$$\frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2 + \nu_\alpha^2} \ll 1, \ \alpha = 1,2 \tag{2.21}$$

и условия ее применимости в низкочастотной области имеют вид

$$\omega \ll \min \nu_\alpha, \ \max \frac{k v_{T\alpha}}{\nu_\alpha} \ll 1. \tag{2.22}$$

В высокочастотной области формула (1.2) применима, если

$$\omega \gg \max \nu_\alpha, \ \max \frac{k v_{T\alpha}}{\omega} \ll 1. \tag{2.23}$$

Формула (1.2) также не учитывает не связанный с разложением по параметру (2.21) бесстолкновительный диссипативный вклад ионов в диэлектрическую постоянную

$$\delta\epsilon_{iL}(\omega, k) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha=1,2} \frac{\omega\omega_{L\alpha}^2}{k^3 v_{T\alpha}^4} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right), \tag{2.24}$$

существенный в высокочастотной области при $k v_{T\alpha} \gg \nu_\alpha$. Такой подход оправдан в условиях, когда описываемая последним слагаемым (1.2) диссипация, обусловленная столкновениями ионов разных сортов, превосходит бесстолкновительный диссипативный вклад каждого сорта ионов (2.23)

$$\nu_0 \frac{\omega_L^2 - \bar{\omega}_L^2}{\omega^3} \gg \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\omega_{L\alpha}^2}{k^3 v_{T\alpha}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T\alpha}^2}\right). \tag{2.25}$$

Вклад от столкновений ионов одного сорта возникает при учете слагаемых следующего порядка малости по параметру (2.21) в разложении общего выражения для $\delta\epsilon_i$ [4]. Таким образом неравенства (2.20), (2.22), (2.23) и (2.25) задают условия применимости нашего подхода, основанного на использовании выражений (1.1) для электронного и (1.2) для ионного вкладов в диэлектрическую постоянную.

Подводя итог всему вышеизложенному, можно утверждать, что для случая полностью ионизованной плазмы с двумя сортами ионов, столкновения которых существенны, и с бесстолкновительными электронами установлен простой аналитический закон нелинейного роста ширины линии рассеянного излучения при ВРМБ, который может приводить к тому, что ширина линии оказывается значительно большей декремента затухания ионного звука.

Работа выполнена при частичной поддержке CRDF (грант RP1–2268), РФФИ (проект 02–02–16047), а также в рамках программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект 00–15–96720).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kuzora I. V., Kozlov M. V., Mc Kinstrie C. J., et al., Phys. Lett., **A, 296(1)**, 54 (2002).

[2] Вагин К. Ю., Овчинников К. Н., Силин В. П., Урюпин С. А. Квантовая электроника, (2002), в печати.

[3] Epperlein E. M., Short R. W., and Simon A. Phys. Rev., E, **49**(3), 2480 (1990).

[4] Вагин К. Ю., Овчинников К. Н., Силин В. П., Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5, 18 (2002).

[5] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1988, с. 54.

[6] Горбунов Л. М. ЖЭТФ, **55**, 2298 (1968).

[7] Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., Наука, 1973, с. 147.

Поступила в редакцию 3 апреля 2002 г.