УДК 536.2

ОБ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЖИДКОСТИ

В. П. Макаров

Строго получено уравнение теплопроводности, полностью эквивалентное основному уравнению переноса тепла. Полученное уравнение существенно отличается от известного уравнения теплопроводности в форме Ландау–Лифшица.

В рамках гидродинамики состояние движущейся жидкости определяется пятью величинами: проекциями скорости на координатные оси $v_i(\mathbf{x}, t)$ и, например, плотностью $\rho(\mathbf{x}, t)$ и температурой $T(\mathbf{x}, t)$. Поэтому полная система уравнений гидродинамики – это пять уравнений: уравнение непрерывности (см. [1, §1])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \tag{1}$$

уравнения Навье–Стокса (см. [1, §15])

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \ \sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{2}$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, σ'_{ik} – вязкий тензор напряжений и η, ζ – коэффициенты вязкости; и общее уравнение переноса тепла, строгий вывод которого дан Ландау и Лифшицем в VI томе Курса теоретической физики "Гидродинамика" [1, §49],

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \tag{3}$$

где s – энтропия единицы массы, κ – коэффициент теплопроводности, связывающий плотность потока тепла $\mathbf{q}$ с градиентом температуры: $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$. (Если в жидкости присутствуют внешние источники тепла, то в правую часть уравнения (3) нужно добавить слагаемое $Q(\mathbf{x}, t)$ – тепло, выделяемое этими источниками в единице объема в единицу времени [1, §50].)

Уравнение (3) можно упростить, выразив производные от энтропии через производные от температуры, давления или плотности – величин, которые входят в уравнения (1) и (2). Эта задача была поставлена и решалась в [1, §50]. Если рассматривать энтропию как функцию температуры и давления, то

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{\partial p}{\partial t}, \ \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \nabla p. \tag{4}$$

В [1, §50] приводятся некоторые физические соображения, на основании которых вторыми членами в правых частях равенств (4) авторы пренебрегают. Тогда, так как $T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = c_p$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении (см. [2, §13]), уравнение (3) приводится к виду

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T\right) = \nabla\cdot\kappa\nabla T + \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{5}$$

Для неподвижной жидкости из (5) получается уравнение

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot\kappa\nabla T, \tag{6}$$

которое при постоянной теплопроводности κ приводится к уравнению Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\nabla^2 T, \tag{7}$$

где коэффициент температуропроводности

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}. \tag{8}$$

В [1, §50] отмечается, что уравнение (6) также "получается приравниванием количества тепла, поглощающегося в единице объема жидкости в единицу времени, дивергенции плотности потока тепла, взятой с обратным знаком. Первое из них равно $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$; здесь должна быть взята теплоемкость c_p, так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным". Уравнение теплопроводности в форме Ландау–Лифшица (5) (или (6) – (8)) приводится еще в первом (1944 года) издании их книги и используется во многих работах (см., например, [2 – 5]). Заметим, однако, что уравнение теплопроводности в классических работах Максвелла и Стокса (см. [6]) содержит не теплоемкость c_p, а теплоемкость при постоянном объеме c_v.

Задачу, которая математически уже полностью сформулирована, можно решать и без привлечения еще каких-либо физических соображений. В отличие от [1], я так и поступаю. Используя известные соотношения термодинамики (см. [2, §§13, 16])

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{9}$$

можно записать равенства (4) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \nabla s = \frac{c_p}{T}\nabla T + \frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \nabla p. \tag{10}$$

Предполагая воспользоваться уравнением непрерывности (1), будем рассматривать давление в (10) как функцию плотности ρ и температуры $T : p = p(\rho, T)$ в соответствии с уравнением состояния жидкости. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left[\frac{c_p}{T} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\right]\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

и аналогичное равенство для ∇_s с заменой в правой части производных по времени на производные по координатам. Простые вычисления дают:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \tag{12}$$

Согласно известному термодинамическому соотношению (см. [2, §16]),

$$c_p - c_v = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T. \tag{13}$$

Используя (12) и (13), приводим равенство (11) и аналогичное равенство для ∇s к виду:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \nabla s = \frac{c_v}{T}\nabla T - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla \rho. \tag{14}$$

Подставляя теперь выражения (14) в (3) и учитывая уравнение непрерывности (1), получаем точное уравнение теплопроводности, полностью равносильное основному уравнению переноса тепла Ландау–Лифшица (3):

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T\right) + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla\cdot\mathbf{v} = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nabla\cdot(\kappa\nabla T). \tag{15}$$

Заметим, что вычисления существенно упрощаются, если с самого начала выбрать в качестве основных переменных не температуру и давление, как в [1, §50], а температуру и плотность. Тогда, используя известные термодинамические соотношения (см. [2, §§13, 16])

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \frac{c_v}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho, \tag{16}$$

мы сразу же получаем равенства (14).

Для покоящейся жидкости, полагая в (15) $\mathbf{v} = 0$, получаем уравнение

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \tag{17}$$

а если κ можно считать постоянной, то уравнение (7), в котором, однако, коэффициент температуропроводности (8) выражается через c_v, а не через c_p – в согласии с [6]. Для покоящейся жидкости уравнение непрерывности (1) сводится к постоянству плотности как функции времени: $\rho = \rho(\mathbf{x})$, а уравнения Навье–Стокса (2) – к постоянству давления вдоль жидкости (но не во времени): $p = p(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. М., Наука, 1976.

[3] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966. Глава X, §§1 – 2.

[4] Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М., Наука, 1987.

[5] Гинзбург В. Л. УФН, **106**, N 1, 151 (1972).

[6] Lamb H. Hydrodynamics. N.Y.: Dover Publications, 1945, Chap. XI.

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 6 июля 2005 г.