УДК 537.87

О СПОНТАННОМ И ВЫНУЖДЕННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

В. В. Букин, С. В. Гарнов, А. А. Самохин

На простейшем примере заряженного механического осциллятора, взаимодействующего с электромагнитным колебательным контуром, обсуждаются методические вопросы использования понятий спонтанного и вынужденного излучения для данной классической системы. Получено соотношение между скоростями процессов обмена энергией, которые соответствуют процессам поглощения, спонтанного и вынужденного излучения осциллятора в этой системе.

При описании процессов взаимодействия электромагнитного излучения с веществом широко используются такие понятия как вынужденное излучение, вынужденное рассеяние, спонтанное излучение, спонтанное рассеяние и поглощение. Между тем физическое содержание и взаимосвязь этих понятий, за исключением последнего, не всегда являются очевидными, поскольку, в частности, строгое и общепринятое определение этих понятий, насколько нам известно, в научной литературе фактически отсутствует. По этой причине представляется целесообразным продолжить обсуждение этой методической проблемы, ряд аспектов которой уже рассматривался ранее на страницах УФН [1, 2].

Прежде всего стоит подчеркнуть, что понятия "спонтанное" и "вынужденное" относятся не к полю излучения как таковому, а к процессу его создания или изменения. Необходимость такого напоминания связана не только с неоднозначностью слова "излучение", но и с тем, например, что в предложениях к терминологическому словарю по оптике делается противоположное утверждение и вынужденным излучением называется "электромагнитное излучение, испускаемое квантовой системой, находящейся в возбужденном, т.е. неравновесном состоянии, под действием внешнего (вынуждающего) электромагнитного излучения" [3]. Кроме того, в этом примере, как и в ряде других случаев (см. напр., [4 – 8]), вынужденное излучение связывается только с квантовыми системами со ссылкой на известную работу Эйнштейна [9], а о процессе вынужденного излучения в классических системах при этом ничего не говорится (см., однако, [10]). Подобная неполнота изложения, характерная для многих учебных и справочных физических и энциклопедических изданий, в том числе, и для понятия спонтанного излучения, может вводить в заблуждение, поскольку и вынужденное, и спонтанное излучение не являются чисто квантовыми эффектами [1, 2], т. е. подобные процессы имеют место и в классической электродинамике. В классической электронике использование понятий спонтанного и вынужденного излучения является общепринятым [11 – 13], но, как уже отмечалось выше, их содержательность и непротиворечивость при этом не обсуждаются.

В процессе излучения энергия передается от вещества к электромагнитному полю, т.е. при отсутствии других воздействий энергия излучающего вещества должна уменьшаться. Это изменение можно определить по потоку энергии излучения в дальней зоне или по торможению зарядов их собственным полем с учетом запаздывания (лучистое трение). В книге [14] излагаются оба эти подхода, которые приводят к одному и тому же выражению для мощности излучения I. В дипольном приближении, когда длина волны излучения велика по сравнению с размерами системы, это выражение оказывается прямо пропорциональным скалярному квадрату второй производной по времени от дипольного момента $\ddot{\mathbf{d}}$ и обратно пропорциональным кубу скорости света c:

$$I = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\mathbf{d}}|^2. \tag{1}$$

Величина (1) получается после интегрирования дифференциального углового распределения по полному телесному углу и характеризуется в [14] как "полное излучение". Вопрос о том, является ли описываемый формулой (1) процесс излучения спонтанным или вынужденным, в [14] не обсуждается. Во многих изданиях (см. [8], а также в уже упоминавшихся БСЭ и ФЭС) спонтанное излучение связывается только или прежде всего с квантовыми системами, хотя в [1] специально подчеркивается, что определение спонтанного излучения как процесса, происходящего при отсутствии внешнего (по отношению к системе) электромагнитного поля, в равной степени пригодно в классике и квантовой области.

Несмотря на естественность такого определения, его нельзя назвать исчерпывающим и непротиворечивым, поскольку при этом возникает остающийся без ответа вопрос о спонтанном излучении при наличии внешнего поля, которое, в частности, может быть основной причиной изменений дипольного момента в формуле (1). Сразу же после этой формулы в [14] написано, что в том случае, когда имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд e, вместо формулы (1) получается выражение

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}w^2, \tag{2}$$

где w обозначает ускорение заряда.

Очевидно, что приведенное выше определение спонтанного излучения перестает работать уже в простейшем случае излучения свободного заряда, движение которого обусловлено полем внешней электромагнитной волны. "Это движение, в свою очередь, сопровождается излучением во все стороны; происходит, как говорят, *рассеяние* первоначальной волны" – так описывается и называется этот процесс в прижизненных изданиях книги [14]. (Примечательные в данной ситуации слова "как говорят" в последующих изданиях были опущены.) Использование термина *рассеяние* в подобных случаях представляется вполне естественным, но необходимой ясности в определение понятий спонтанного и вынужденного излучения это не вносит.

При наличии внешнего поля изменение энергии излучающей частицы перестает зависеть только от ее взаимодействия с собственным запаздывающим полем, поскольку внешнее поле влияет на движение частицы и может совершать над ней положительную или отрицательную работу, т.е. увеличивать или уменьшать ее энергию. В частном случае, когда излучательные потери компенсируются работой внешнего поля, энергия излучающей частицы остается неизменной. Простейшими примерами подобного процесса является рассеяние электромагнитной волны на свободном заряде или осцилляторе. Эффективное сечение рассеяния σ электромагнитной волны с частотой ω на осцилляторе с зарядом e, массой m, и собственной частотой ω_0 имеет вид [14]:

$$\sigma = \sigma_0\omega^4[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma_0^2\omega^2]^{-1}, \tag{3}$$

где величина затухания γ_0 обусловлена лучистым трением, а сечение σ_0 определяется формулой Томсона

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}, \tag{4}$$

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{5}$$

Если пренебречь лучистым трением γ_0 и одновременно положить $\omega_0 = 0$, то $\sigma = \sigma_0$. Учет ненулевого значения γ_0 важен в точном резонансе $\omega = \omega_0$, когда величина сечения резко увеличивается

$$\sigma_\Gamma = \sigma_0 \frac{\omega_0^2}{\gamma_0^2} = 6\pi \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2. \tag{6}$$

В оптическом диапазоне сечение резонансного рассеяния σ_Γ превосходит σ_0 на много порядков, поскольку $\gamma_0 < \omega_0$. Выражение (6) является самосогласованным, т.е. совершаемая внешним полем над осциллятором в единицу времени работа P равна мощности излучения (рассеяния), определяемой формулой (2). Нетрудно убедиться, однако, что для достижения такого самосогласования в нерезонансном случае $\omega \neq \omega_0$ в коэффициенте лучистого трения (4) необходимо заменить собственную частоту ω_0 на частоту внешнего поля ω. Используя выражения для координаты x, скорости v и ускорения w установившихся колебаний осциллятора в поле $E = E_0 \cos\omega t$

$$x = r_0\omega^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \tag{7}$$

$$r_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2}, v = \frac{dx}{dt}, w = \frac{dv}{dt}, \tag{8}$$

получаем для P и I после усреднения по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ev(t)E(t)dt = \frac{e}{2}E_0\gamma\omega_0^4 r_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{-1}, \tag{9}$$

$$I = \frac{e^2}{3} r_0^2 \frac{\omega^8}{c^3}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{-1}. \tag{10}$$

Из условия равенства выражений (9) и (10) следует

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{\omega^4 e r_0}{c^3 E_0} = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{mc^3}. \tag{11}$$

Величина γ определяет длительность переходного процесса, связанного с затуханием начальных колебаний и установлением стационарного режима, который достигается при $\gamma t > 1$. При отсутствии внешнего поля стационарному режиму соответствует нулевое значение энергии осциллятора $E = \frac{m}{2}(v^2 + \omega^2 x^2)$. Изменение энергии $E(t)$ от ненулевого начального значения $E(0)$ в процессе установления такого стационарного состояния определяется уравнением

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma_0 E. \tag{12}$$

Как и выражение (6), это соотношение является самосогласованным, поскольку $\gamma_0 E = I$, т.е. скорость изменения энергии осциллятора равна мощности излучения (1).

Без учета γ установление стационарного одночастотного режима при наличии периодического внешнего воздействия невозможно. В частности, в точном резонансе амплитуда колебаний осциллятора на больших временах неограниченно (линейно) возрастает за счет работы, которая производится внешним полем.

Как известно, однако, на начальном этапе переходного процесса при определенных условиях амплитуда колебаний осциллятора может не только возрастать, но и уменьшаться, т.е. осциллятор может совершать работу над внешним полем за счет своей начальной энергии. На временах $\gamma t < 1$, когда можно пренебречь затуханием, выражения для координаты $x(t)$ с $x(0) = 0$ и скорости изменения энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний, в точном резонансе имеют вид:

$$x(t) = \left(v_0 + \frac{bt}{2}\right)\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0},\ b = \frac{eE_0}{m}, \tag{13}$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE}{dt}dt = \frac{b}{2m}\left(v_0 + \frac{bt}{2}\right). \tag{14}$$

В формуле (14) произведено усреднение по периоду колебаний с учетом предполагаемой медленности изменения амплитуды колебаний, которая имеет место при достаточной малости величины внешнего поля. Знак изменения энергии в этой формуле на малых временах зависит от относительного знака E_0 и v_0, т.е. от относительной фазы колебаний осциллятора и внешнего поля. Очевидно, что в данном случае при $v_0 b < 0$ уменьшение энергии осциллятора при $|bt| < |2v_0|$ обусловлено не потерями на излучение в соответствии с формулой (1), а его работой против внешнего поля, т.е. процессом, обратным поглощению осциллятором энергии этого поля. С этой точки зрения такой линейный по внешнему полю процесс тоже можно именовать индуцированным излучением, как это и делается, например, в учебнике [10], однако линейная полевая зависимость существенно отличает его от квантового и тех классических случаев, в которых реализуется квадратичная зависимость от напряженности поля. Таким образом, формулы (12) и (14) описывают изменение энергии осциллятора в свободном пространстве при действии внешнего заданного поля за счет процессов спонтанного, а также вынужденного излучения и поглощения.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда внешнее поле уже не считается заданным и может изменяться в соответствии с уменьшением или увеличением энергии взаимодействующего с ним осциллятора.

Будем считать, что действующее на осциллятор поле является полем внутри плоского конденсатора емкостью C, соединенного с индуктивностью L (LC-контур с собственной частотой $\omega_2 = (LC)^{-1/2}$). Осциллятор представляет собой тонкую пластинку с массой m, зарядом q и площадью S, которая расположена параллельно пластинам конденсатора, имеющим такую же площадь S, и может колебаться между ними с собственной частотой $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ за счет упругой силы $F = -kx$, где координата x отсчитывается от середины расстояния l между пластинами.

Эволюция координаты x и заряда конденсатора Q в этом случае определяется уравнениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = -\omega_3^2 Q \frac{l}{q}, \; \omega_3^2 = \frac{4\pi q^2}{mSl}, \tag{15}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_2^2 Q = -\omega_2^2 x \frac{q}{l}. \tag{16}$$

В уравнении (15) учтено, что обусловленная зарядом Q напряженность поля внутри конденсатора дается выражением $E = -Q/Cl$, $C = S/4\pi l$, а уравнение (16) выражает собой равенство напряжений на индуктивности и обкладках конденсатора с учетом дополнительной разности потенциалов, обусловленной наличием внутри конденсатора заряда q, причем изменение заряда Q связано с током J соотношением $dQ/dt = -J$. При наличии в контуре активного сопротивления R это равенство заменяется соотношением

$$\frac{Q}{C} + 4\pi \frac{q}{S} x - RJ + L\frac{dJ}{dt} = 0. \tag{17}$$

Из (15) и (16) следует закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2 + \frac{qQ}{Cl}x\right) = 0, \; \frac{dE_1}{dt} = -\frac{q}{Cl}Q\frac{dx}{dt}, \; \frac{dE_2}{dt} = -\frac{q}{Cl}x\frac{dQ}{dt}, \tag{18}$$

где выражения для энергий осциллятора E_1 и контура E_2 определяются обычными формулами

$$E_1 = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega_1^2 x^2\right], \tag{19}$$

$$E_2 = \frac{L}{2}\left[\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \omega_2^2 Q^2\right]. \tag{20}$$

Уравнения (15) и (16) могут быть также записаны в следующем виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_4^2 x = -\frac{\omega_3^2}{\omega_2^2}\frac{l}{q}\frac{dJ}{dt}, \; \omega_4^2 = \omega_1^2 - \omega_3^2, \tag{21}$$

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \omega_2^2 J = \omega_2^2 \frac{q}{l}\frac{dx}{dt}. \tag{22}$$

С учетом (21) и (22) вместо (18) – (20) тогда имеем

$$\frac{d}{dt}(E_{1m} + E_{2m}) = 0, \; \frac{dE_{1m}}{dt} = -\frac{q}{Cl}\frac{dx}{dt}\frac{dJ}{dt}, \tag{23}$$

$$E_{1m} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega_4^2 x^2\right], \tag{24}$$

$$E_{2m} = \frac{L}{2\omega_2^2}\left[\left(\frac{dJ}{dt}\right)^2 + \omega_2^2 J^2\right]. \tag{25}$$

В отличие от (18), закон сохранения (23) явно не содержит энергию взаимодействия, которое приводит, в частности, к изменению собственной частоты осциллятора в (21) и (24). Необходимо иметь в виду также, что выражения (20) и (25) совпадают между собой только для контура без внешнего воздействия.

Поскольку системы уравнений (15), (16) и (21), (22) эквивалентны, то их собственные частоты определяются одним и тем же характеристическим биквадратным уравнением

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_2^2\omega_4^2 = 0. \tag{26}$$

В условиях точного резонанса $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, когда, в соответствии с (26), $\omega_\pm^2 = \omega_0^2 \pm \omega_0\omega_3$, получаем для x и Q

$$x = A_+ \cos\omega_+ t + A_- \cos\omega_- t + B_+ \sin\omega_+ t + B_- \sin\omega_- t, \tag{27}$$

$$Q = \frac{q}{l}\frac{\omega_0}{\omega_3}(A_+ \cos\omega_+ t - A_- \cos\omega_- t + B_+ \sin\omega_+ t - B_- \sin\omega_- t), \tag{28}$$

где коэффициенты $A_\pm$, $B_\pm$ определяются из начальных условий, а собственные частоты системы в приближении слабой связи даются выражениями

$$\omega_+ = \omega_0 + \Delta, \; \omega_- = \omega_0 - \Delta, \; \Delta = \omega_3/2. \tag{29}$$

При $x(0) = J(0) = 0$, $v(0) = v_0$ и $Q(0) = Q_0$ из (27) - (29) получаем

$$x = -\frac{\omega_3}{\omega_0}\frac{l}{q}Q_0 \sin\omega_0 t \sin\Delta t + \frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin\omega_+ t}{\omega_+} + \frac{\sin\omega_- t}{\omega_-}\right), \tag{30}$$

$$Q = Q_0 \cos\omega_0 t \cos\Delta t + \frac{q\omega_0 v_0}{2\omega_3 l}\left(\frac{\sin\omega_+ t}{\omega_+} - \frac{\sin\omega_- t}{\omega_-}\right). \tag{31}$$

Для скорости изменения энергии осциллятора, усредненной по периоду колебаний, это дает

$$\left\langle \frac{dE_1}{dt} \right\rangle = \frac{\omega_3}{2}\left[\frac{E_0^2}{8\pi}Sl - \frac{mv_0^2}{2}\right]\sin\omega_3 t + \frac{1}{2}qE_0 v_0 \cos\omega_3 t. \tag{32}$$

В рассматриваемом приближении аналогичное выражение получается также для усредненного значения производной по времени от энергии E_{1m}.

В случае произвольных начальных условий средняя скорость изменения энергии имеет вид

$$\left\langle \frac{dE_1}{dt} \right\rangle = \frac{\omega_3}{2}[E_{20} - E_{10}]\sin\omega_3 t + \frac{1}{2}q\tilde{E}_0 \tilde{v}_0 \cos\Delta\varphi \cos\omega_3 t, \tag{33}$$

где E_{10} и E_{20} – начальные энергии осциллятора и контура, $\tilde{E}_0$ и $\tilde{v}_0$ – амплитуды колебаний поля в конденсаторе и скорости осциллятора, $\Delta\varphi$ – разность фаз этих колебаний.

На малых временах сумма первого и последнего членов в формуле (32) совпадает с выражением (14), которое относится к случаю заданного внешнего поля и описывает процессы увеличения или уменьшения энергии осциллятора за счет воздействия этого поля. При отсутствии внешнего поля оба этих члена обращаются в нуль. Остающийся при этом в (32) член описывает уменьшение начальной энергии осциллятора за счет процесса, который является аналогом спонтанного излучения для случая электромагнитного поля, сосредоточенного в колебательном контуре, т.е. на размерах, много меньших длины волны.

Из выражения в квадратной скобке в (32) видно, что соответствующая этому процессу величина квадрата эффективного поля определяется выражением

$$E_{ef}^2 = 4\pi\frac{mv_0^2}{Sl}. \tag{34}$$

Поскольку относительная величина второго и третьего члена в (32) зависит от времени, то соотношение (34) получается из их приравнивания при $\omega_3 t = 2$. В этот момент абсолютные величины скоростей процессов поглощения, вынужденного и спонтанного излучения оказываются равными. Отметим также, что аналог спонтанного излучения, определяемый вторым членом в (32), отличается от случая осциллятора в свободном пространстве (12) – вместо γ_0 в (32) стоит зависящее от времени выражение $\frac{\omega_3}{2}\sin\omega_3 t$.

Таким образом, изложенный здесь анализ поведения простейших физических систем, в которых реализуются аналоги спонтанного и вынужденного излучения, показывает, что соотношение между скоростями этих процессов не является универсальным и может зависеть не только от типа системы, но и от времени. Содержательность понятий спонтанного и вынужденного излучения определяется тем обстоятельством, что при своем движении заряженная частица может терять свою энергию за счет взаимодействия с собственным запаздывающим полем в вакууме или в системе (среде), а также за счет взаимодействия с внешним полем. В последнем случае, когда частица совершает работу против внешнего поля, происходит усиление именно этого поля, что несколько иными словами обычно всегда подчеркивается как особенное свойство вынужденного излучения. Соотношение между процессами вынужденного излучения и вынужденного рассеяния будет рассмотрено отдельно.

Авторы выражают благодарность В. П. Макарову и А. А. Рухадзе за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Собельман И. И., Тютин И. В. УФН, **79**, 595 (1963).

[2] Гинзбург В. Л. УФН, **140**, 687 (1983).

[3] Гречишкин С. Г., Капорский Л. Н. Опт. журнал, **67**, N 12, 76 (2000).

[4] Физический энциклопедический словарь, М., Сов. энциклопедия, **2**, 180 (1962).

[5] Физический энциклопедический словарь. М., Сов. энциклопедия, 96 (1983).

[6] БСЭ. М., Сов. энциклопедия, **10**, 70 (1972).

[7] БСЭ. М., Сов. энциклопедия, **5**, 528 (1971).

[8] Савельев И. В. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц, 3-е изд. М., Наука, 1970.

[9] Einstein A. Verhandl. Dtsch. Phys. Ges., N 18, 318 (1916).

[10] Сивухин Д. В. Оптика. М., Наука, 1985.

[11] Вайнштейн Л. А. ЖЭТФ, **94**, N 5, 40 (1988).

[12] Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., Наука, 1990.

[13] Т р у б е ц к о в Д. И., Х р а м о в А. Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков, т. 1, М., Физматлит, 2003.

[14] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля, 3-е изд. М., Физматлит, 1960.

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 12 июля 2005 г.