УДК 533.591

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

В. Г. Кирцхалия, А. А. Рухадзе

Проведен анализ устойчивости тангенциального разрыва для сжимаемых жидкостей в поле тяжести, перпендикулярной поверхности разрыва. В линейном приближении получено дисперсионное уравнение, которое в пределе слабого поля тяжести переходит в уравнение, исследованное в наших предыдущих работах [1, 2]. Показано, что в пределе сильного поля тяжести неустойчивость не стабилизируется и переходит в резонансную конвективную неустойчивость, сносимую потоком.

1. Исходим из системы уравнений гидродинамики, дополненной уравнением состояния:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{V} = 0, \ P = P(\rho).$$

Здесь ρ – плотность, $\vec{V}$ – скорость жидкости, P – давление, а g – ускорение однородного и постоянного поля тяжести. Невозмущенную скорость $\vec{V}_0(z)$ направим вдоль оси X и считаем неоднородной вдоль оси Z, параллельной полю тяжести $\vec{g}$. В направлении оси Z считаются неоднородными и равновесные плотность $\rho_0(z)$ и давление $P_0(z)$. В равновесии, когда $\vec{g} \uparrow\downarrow \vec{O}Z$, очевидно, выполняются соотношения:

$$\frac{dP_0}{dz} + \rho_0 g = 0; \ P_0 = P_0(\rho_0); \ \frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} = U^2(z), \tag{2}$$

где $U(z)$ – неоднородная скорость звука в жидкости. Кроме того, считаем, что $P_0(z)$ и $\rho_0(z)$ плавно неоднородны вдоль оси z, за исключением плоскости $z = 0$, на которой они претерпевают скачок.

Для малых возмущений равновесных величин $\rho', P', \vec{v}$ зависимость этих возмущений от времени и координат с учетом симметрии можно принять в виде

$$f(x, y, z, t) = f(z)\exp[i(kx - \omega t)], \tag{3}$$

где ω и k – частота и волновой вектор. Из линеаризированной системы (1) при этом можно получить следующее уравнение для возмущения давления:

$$\frac{d^2 P'}{dz^2} + \alpha(z)\frac{dP'}{dz} - b^2(z)P' = 0, \tag{4}$$

где

$$\alpha(z) = \frac{g}{U^2(z)}, \, b^2(z) = k^2 + \frac{2g}{U^3(z)}\frac{dU}{dz} - \frac{(\omega - kV_0(z))^2}{U^2(z)}. \tag{5}$$

Ниже будет проанализировано уравнение (4), причем граничные условия на поверхности разрыва $z = 0$ получены из самого уравнения (4) (либо линеаризированной системы (1)) путем интегрирования по малому переходному слою вблизи поверхности разрыва. Они записываются в виде

$$\{P'\}_{z=0} = 0, \; \left\{\frac{\frac{dP'}{dz} - \frac{g}{U^2(z)}P'}{\rho(\omega - kV_0)^2}\right\}_{z=0} = 0. \tag{6}$$

Таким образом задача сформулирована: необходимо решить уравнение (4) в областях $z < 0$ и $z > 0$ и сшить решения на поверхности $z = 0$ с учетом граничных условий (6).

2. Приступая к решению сформулированной выше задачи, заметим, что, согласно уравнениям (2), среда неоднородна и равновесные величины $P_0(z)$ и $\rho_0(z)$ являются, вообще говоря, функциями z в областях $z > 0$ и $z < 0$. Как следствие, коэффициенты уравнения (4) также неоднородны, что затрудняет его решение. Однако в изотермическом приближении скорость звука U определяется однородной температурой среды и поэтому является постоянной. Неоднородными в этом приближении оказываются только плотность среды $\rho_0(z)$ и скорость $\vec{V}_0(z)$, скачком меняющиеся на поверхности $z = 0$. Поэтому коэффициенты уравнения (4) оказываются постоянными и, следовательно, его решениями в областях $z > 0$ и $z < 0$ будут

$$P'_{1,2} = \begin{cases} C_1 e^{\chi_1 z} & \text{при } z > 0 \\ C_2 e^{\chi_2 z} & \text{при } z < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где χ_1 и χ_2 определяются характеристическим уравнением и, в предположении, что в области $z < 0$ жидкость покоится, равны:

$$\chi_1 = -\frac{g}{2U_1^2} - \sqrt{\frac{g^2}{4U_1^4} + k^2 - \frac{(\omega - kV_0)^2}{U_1^2}}, \tag{8}$$

$$\chi_2 = -\frac{g}{2U_2^2} - \sqrt{\frac{g^2}{4U_2^4} + k^2 - \frac{\omega^2}{U_2^2}}. \tag{9}$$

Отметим, что значения χ_1 и χ_2 получены с учетом необходимости выполнения условий

$$\mathrm{Re}\chi_1 < 0, \ \mathrm{Re}\chi_2 > 0. \tag{10}$$

Удовлетворив граничным условиям (6), получаем дисперсионное уравнение малых колебаний, описывающее неустойчивость тангенциального разрыва

$$\frac{\rho_1 (U_p - V_0)^2}{U_2^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2 U_2^2 (U_2^2 - U_p^2)}{g^2}}\right] = \frac{\rho_2 U_p^2}{U_1^2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4k^2 U_1^2 [U_1^2 - (U_p - V_0)^2]}{g^2}}\right], \tag{11}$$

где $U_p = \omega/k$ – фазовая скорость возмущения.

В пределе $g \to 0$ уравнение (11) переходит в дисперсионное уравнение для малых колебаний тангенциального разрыва в отсутствие поля тяжести, исследованное в наших предшествующих работах [1, 2]. Этот предел соответствует условию слабого поля тяжести

$$g^2 \ll 4k^2 U^4. \tag{12}$$

В обратном пределе сильного поля тяжести из (11) получаем:

$$\frac{\rho_1 (U_p - V_0)^2}{U_2^2} = -\frac{\rho_2 k^2 U_p^2 [U_1^2 - (U_p - V_0)^2]}{g^2}. \tag{13}$$

Полагая, что скачок плотности не слишком велик, т.е. $\rho_2 \geq \rho_1$, в правой части уравнения (13) можно принять $U_p \approx V_0$, после чего получим

$$(U_p - V_0)^2 = \frac{k^2 U_1^2 U_2^2 V_0^2}{g^2} \frac{\rho_2}{\rho_1}, \tag{14}$$

откуда находим спектр нарастающих колебаний

$$\omega = kV_0 \left(1 + i\frac{kU_1U_2}{g}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\right). \tag{15}$$

Таким образом, сильное поле тяжести при выполнении условия, обратного (12), не стабилизирует неустойчивость тангенциального разрыва, хотя с ростом g инкремент нарастания возмущения падает. Неустойчивость становится конвективной и сносится со скоростью потока V_0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жвания И. А., Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 10, 35 (2002).

[2] Кирцхалия В. Г., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 4, 50 (2003).

Поступила в редакцию 25 января 2006 г.