

УДК 533.9

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПЫЛЕВЫХ КЛАСТЕРОВ В ВИДЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА С ЧАСТИЦЕЙ В ЦЕНТРЕ

Н. Г. Гусейн-заде, В. Н. Цытович, Ш. Г. Амиранашвили

В работе исследуются условия формирования и устойчивость двумерных плоских “квазикристаллов” в виде правильных многоугольников с частицей в центре, которые формируются в комплексной плазме из заряженных макрочастиц одинакового размера. Взаимодействие между микрочастицами рассматривается в общем виде $U(r)$, как функция, зависящая только от расстояния между частицами. Таким образом, полученные результаты позволяют оценить потенциал взаимодействия между макрочастицами в реальных экспериментах.

До настоящего времени главные усилия и экспериментаторов, и теоретиков были направлены на изучение двумерных структур, образованных одинаково заряженными частицами. Впервые образование (2D) двумерных плоских кулоновских “квазикристаллов” наблюдалось для системы ультрахолодных атомных ионов в различных ловушках, таких как ловушки Пеннинга, Пауля, накопительных кольцах и др. (см., например, обзор [1]).

Двумерные (2D) квазикристаллы наблюдались также в коллоидных системах [2, 3] и в пылевой плазме (см. обзоры [4] и [5]). Одно из первых теоретических описаний таких систем, основанное на дебаевском экранированном потенциале взаимодействия между частицами, было приведено в работе [6]. Хотя в столь сложных системах присутствует механизм нелинейной экранировки больших зарядов, вопрос, можно ли считать этот механизм дебаевским, оставался открытым [4].

Общая теория для произвольного потенциала взаимодействия между макрочастицами для двумерных структур была развита в работе [7], где были получены условия

существования и спектры малых колебаний для двумерных квазикристаллов (кластеров), которые представляют собой правильный многоугольник.

В большинстве экспериментов квазикристаллические структуры наблюдаются во внешнем параболическом удерживающем потенциале. Для плоских квазикристаллов эксперименты показали, что формирование оболочек с ростом N (числа макрочастиц) происходит следующим образом: сначала образуется одна оболочка (кольцо). Затем, с увеличением N , кольцо становится энергетически невыгодной структурой, а реализуется кольцо с частицей в центре, затем образуется вторая кольцевая оболочка, затем третья и т.д. Эта структура аналогична модели “классического” атома.

В данной работе проводится теоретическое изучение свойств одной из простейших двумерных структур-кластеров, которая представляет собой правильный многоугольник с частицей в центре. Для этой системы одинаковых макрочастиц динамика плазмы не учитывается, а ее роль сводится к созданию определенного закона взаимодействия макрочастиц. Эта работа является в какой-то мере продолжением развитой в [7] теории.

Постановка задачи. Рассмотрим систему из N одноименно заряженных одномерных макрочастиц, удерживаемых от расплывания внешним потенциальным полем $U(\mathbf{r}_\perp)$. Вблизи дна любой аксиально-симметричной потенциальной ямы удерживающий потенциал можно всегда аппроксимировать параболическим потенциалом.

Таким образом, $U_{foc} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2)$, где m – масса макрочастицы, а ω_0 – характерная частота, с которой колеблется одна макрочастица в потенциальной яме (т.е. связанная только с параметрами ловушки). Такая ситуация справедлива для большинства реальных экспериментов.

Наш метод анализа малых колебаний системы допускает также рассмотрение системы с жесткими стенками, т.е. $U_{foc} = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2)^{M+1}$, где $M \gg 1$.

Потенциал взаимодействия частиц друг с другом в большинстве известных случаев является функцией вида: $U_{int} = U(r)$, которая не предполагается заранее известной. Для удобства дальнейшей записи запишем ее как функцию $U_{int} \approx f(r^2)$, где $r = |\mathbf{r}| = |\vec{r}_n - \vec{r}_k|$, n и k – номера макрочастиц.

Итак, мы имеем систему заряженных частиц, удерживаемых от поперечного расплывания фокусирующей силой ловушки

$$\mathbf{F}_{foc} = -m\omega_0^2(M+1)|\mathbf{r}_\perp|^{2M} \mathbf{r}_\perp$$

и взаимодействующих друг с другом с силой

$$\mathbf{F}_{int} = -\nabla U_{int} = -\nabla f(r^2).$$

Запишем уравнения, описывающие все такие системы:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_n}{\partial t^2} + \omega_0^2 (M+1) |\mathbf{r}_{\perp n}|^{2M} \mathbf{r}_{\perp n} + \frac{2}{m} \sum_{k \neq n} f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2) (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k) = 0; \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$, $\mathbf{r}_{\perp n} = (x_n, y_n, 0)$, а m – масса макрочастицы.

Из экспериментов и результатов численного моделирования известно, что маленькое число макрочастиц образует правильные кластеры – треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник с частицей в центре и так далее. Цель работы – рассмотреть колебания простейшего кластера в виде правильного многоугольника с частицей в центре для произвольного потенциала взаимодействия (в предположении, что такой кластер существует). Мы хотим изучить устойчивость такого кластера и получить спектр его колебаний. В частности, такой спектр должен содержать информацию о потенциале взаимодействия. Измеряя спектр, можно уточнить, с каким именно потенциалом взаимодействуют пылинки в разряде.

Уравнения движения. Итак, в кластере N частиц равноудалены друг от друга и лежат на окружности радиуса R , а одна частица расположена в центре ($x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$)

$$\mathbf{r}_n = (R \cos(\varphi_n), R \sin(\varphi_n), n z_0) = (R \cos(n\varphi_0), R \sin(n\varphi_0), n z_0) \quad 1 \leq n \leq N;$$

где $\varphi_0 = 2\pi/N$.

Мы рассматриваем не вращающиеся условия равновесия ($\dot{\varphi}_n = 0$), т.к. всегда можно перейти в систему координат, где система неподвижна.

Для исследования колебаний и устойчивости таких систем удобно перейти к новым переменным: $\mathbf{r}_n = (\rho_n; z_n) = (\rho_n; z_0 n)$, здесь ρ_n – комплексная величина, равная $\rho_n = x_n + iy_n = R \exp(in\varphi_0)$, а $1 \leq n \leq N$.

Теперь уравнения движения запишутся как:

$$\begin{cases} \ddot{\rho}_n + (M+1)\omega_0^2 |\rho_n|^{2M} \rho_n + \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{N'} f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2) (\rho_n - \rho_k) = 0 \\ \ddot{z}_n + \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{N'} f'(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2) (z_n - z_k) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь штрих у суммы \sum' означает, что суммирование проходит по всем $k \neq n$.

Отсюда мы сразу получаем из уравнения для центральной частицы, что для равновесия нужно, чтобы $N \geq 2$.

И соответственно условие существования кластера (баланс сил):

$$\begin{aligned} (M+1)|R|^{2M}\omega_0^2 &= -\frac{2}{mR} \sum'_{k=0}^{N'} f(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k|^2)(\rho_n - \rho_k) = \\ &= -\frac{2}{m} f(R^2) - \frac{2}{m} \sum'_{l=n-k=1}^{N-1} f(|\Delta r|^2)(1 - \cos l\varphi_0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $|\Delta r|^2 = 2R^2(1 - \cos l\varphi_0) = 4R^2 \sin^2(l\varphi_0/2)$.

Это условие равновесия связывает геометрические характеристики кластера (радиус R), частоту ω_0 и потенциал взаимодействия.

У этой системы есть интегралы движения, как еще отмечалось в работе [8]. Если мы просуммируем (2) по всем n , то с точностью до коэффициента получим уравнение движения центра масс.

Спектры колебаний. Рассмотрим малые возмущения:

$$r_n + \delta r_n = (\rho_n + \delta \rho_n; z_n + \delta z_n) = ((R + \delta \zeta_n) \exp(i\varphi_0 n); z_n + \delta z_n), \quad (4)$$

где соответственно: $\delta \rho_n = \delta x_n + i\delta y_n$.

После подстановки (4) в (2) и линеаризации по малым отклонениям от положения равновесия, получим систему $2N$ “зацепляющихся” уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} &\delta \ddot{\rho}_n + \omega_0^2(M+1)R^{2M}\delta \rho_n + \omega_0^2 M R^{2M-2} \rho_n^2 \overline{\delta \rho_n} + \frac{2}{m} \sum' f'(|\Delta r|^2)(\delta \rho_n - \delta \rho_k) + \\ &+ \frac{2}{m} \sum' f''(|\Delta r|^2)(\rho_n - \rho_k)^2(\delta \rho_n - \delta \rho_k) + \frac{2}{m} \sum' f''(|\Delta r|^2)|\rho_n - \rho_k|^2(\delta \rho_n - \delta \rho_k) + \\ &+ \frac{2}{m} \sum' f'(R^2)(\delta \rho_n - \delta \rho_0) + \frac{2}{m} f''(R^2) \rho_n^2 \overline{(\delta \rho_n - \delta \rho_0)} + \frac{2}{m} f''(R^2)|\rho_n|^2(\delta \rho_n - \delta \rho_0) = 0; \quad (5) \\ &\delta \ddot{z}_n + \frac{2}{m} \sum' f'(|\Delta r|^2)(\delta z_n - \delta z_k) = 0, \end{aligned} \right.$$

где \sum' – означает суммирование по всем k , где $(k \neq n)$.

Всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой центр масс всегда покоится, т.е. $\sum_{k=0}^N \delta \rho_k = 0$, тогда мы можем выразить $\delta \rho_0 = -\sum_{k=1}^N \delta \rho_k$. На исследовании устойчивости это не должно сказаться.

Теперь будем искать возмущения в виде комбинации двух сопряженных гармоник [7]:

$$\delta \zeta_n = u(t) \exp(i\varphi_0 ns) + \bar{v}(t) \exp(-i\varphi_0 ns)$$

и $\delta z_n = \text{Re}A(t) \exp(i\varphi_0 ns)$.

Тогда система (5) расщепляется, и мы получаем для малых колебаний систему уравнений, в которых значения сумм уже не зависят от n , и можно проводить суммирование по $l = n - k$. Учтем, что суммирование проводится от 1 до $N - 1$ и при этом сумма от нечетных функций обращается в нуль.

Наконец, полагая $u, v, A \sim \exp(i\omega t)$, получаем дисперсионное уравнение, при этом надо учесть, что здесь метрика i отличается от метрики i в коэффициентах $\exp(i\varphi_0 l)$ уравнения.

Теперь, если учесть условие равновесия (3), то дисперсионное уравнение в нашем случае оказывается биквадратным. Учитывая, что у нас граничные условия запишутся в виде условия цикличности Борна–Кармана: $\delta r_n = \delta r_{n+N}$, спектр малых колебаний, т.е. все возможные колебания, можно получить, перебирая s в первой зоне Бриллюэна: $0 \leq s \leq N/2$, где s – целое число.

Рассмотрев малые колебания нашей задачи и решив ее, получим следующее уравнение для частоты малых колебаний

$$\begin{aligned} 2\omega^2 = & 2A_1(N) - A_{s+1}(N) - A_{s-1}(N) + B_{s+1}(N) + B_{s-1}(N) + \\ & + \frac{2}{m} f'(R^2) [\Delta(s+1) + \Delta(s-1)] + \frac{2R^2}{m} f''(R^2) [2 + \Delta(s+1) + \Delta(s-1)] \pm \\ & \pm \left\{ (A_{s-1}(N) - A_{s+1}(N) + B_{s+1}(N) - B_{s-1}(N) + \right. \\ & + \frac{2}{m} f'(R^2) [\Delta(s+1) - \Delta(s-1)] + \frac{2R^2}{m} f''(R^2) [\Delta(s+1) - \Delta(s-1)])^2 + \\ & + 4 (B_1(N) - B_s(N) + \frac{2R^2}{m} f''(R^2) [1 + \Delta(s-1)]) \times \\ & \left. \times (B_1(N) - B_s(N) + \frac{2R^2}{m} f''(R^2) [1 + \Delta(s+1)]) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} A_s(N) &= -\frac{4}{m} \sum_{l=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi ls}{N}\right) f'(\zeta); \\ B_s(N) &= \frac{4}{m} \sum_{l=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi ls}{N}\right) \{\zeta f''(\zeta)\} = \frac{4}{m} \sum_{l=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi ls}{N}\right) \left\{4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi ls}{N}\right) f''(\zeta)\right\}; \\ \Delta(s) &= \sum_{l=1}^N \exp\left(-i\frac{2\pi ls}{N}\right) = N(\delta_{s,0} + \delta_{s,N}) \end{aligned}$$

и $\zeta = 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi ls}{N}\right)$.

При данном числе частиц в кластере и данном потенциале взаимодействия, перебирая все возможные значения s , мы для каждого находим соответствующие частоты колебаний.

В данной работе мы проанализировали устойчивость одной из простейших плоских структур, образованной одноименно заряженными одномерными макрочастицами. Взаимодействие между макрочастицами рассматривается в общем виде $U(r)$, как функция, зависящая только от расстояния между частицами. При наличии каких-либо эффектов притяжения (например, эффекта затенения Лессажа) возможно возникновение случаев самоудержания. Равновесная конфигурация может реализовываться и при отталкивающем центре, если существует механизм притяжения между макрочастицами. Такая ситуация также полностью описывается нашими формулами. До сих пор точно не известно с каким именно потенциалом взаимодействуют пылинки в разряде, и измерение частот колебаний такой конфигурации может дать ответ на вопрос о типе взаимодействия между частицами.

Работа была выполнена с финансовой поддержкой РФФИ N 05-02-16796-а и NWO N 047.016.020.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bolinger J. J., Wineland D. J., and Dubin D. H. E. *Phys. Plasmas*, **1**, 1403 (1994).
- [2] Clark N. A., Hurd A. J., and Ackerson B. J. *Nature*, **281**, 57 (1979); Murray C. A., Sprenger W. O., and Weak R. A. *Phys. Rev.*, **B42**, 688 (1990); Chen L. B. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 688 (1992).
- [3] Naser S., Palberg T., Blechinger C. and Leiderer P. *Prog. Colloid Polim. Sci*, **104**, 194 (1997).
- [4] Tsyto vitch V. N., Morfill G. and Thomas H. Part I, *Физика плазмы*, **28**, N 8, 623 (2002).
- [5] Форт ов В. Е., Хра пак А. Г., Хра пак С. А. и др. *УФН*, **174**, N 5, 495 (2004).
- [6] Schweigert V. and Peters F. *Phys. Rev.*, **B51**, 7700 (1995).
- [7] Amiranashvili Sh., Gusein-zade N., and Ignatov A. *Phys. Rev. A*, **59**, N 4, 3098 (1999); Amiranashvili Sh. G., Gusein-zade N. G., Tsyto vich V. N. *Phys. Rev. E.*, **64**, 016407 (2001).
- [8] Morikawa G. K., Swenson E. V. *Phys. Fluids*, **14**, N 6, 1058 (1971).