УДК 530.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ ТЕНЗОРАМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

Н. А. Жура

Изучена динамика электромагнитного поля в средах, характеризуемых тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, не имеющих общих главных осей, при учете их пространственной дисперсии.

Целью заметки является изучение вопроса о динамике электромагнитного поля в средах, характеризуемых тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей, не имеющих общих главных осей с учетом их пространственной дисперсии. Она является обобщением заметки автора [1], где ε и μ – постоянные вещественные симметричные положительно определенные матрицы (в фиксированной системе координат). В силу сказанного, изложение результатов приводим в сжатой форме. Также широко используются и обозначения из [1]. Напомним, что в цитированной заметке, благодаря предложенной автором конструкции приведения неотрицательной биквадратичной тернарной формы специального вида к каноническому виду, удалось получить в явном виде расположение оптических осей магнитных кристаллов, а также их классификацию по оптическим свойствам и т.д. В настоящей заметке эти результаты распространены на случай, когда принимается во внимание пространственная дисперсия.

Основная задача состоит в определении условий на тензоры ε и μ при наличии пространственной дисперсии, когда возможно определение нормальной поверхности, а также получение динамики поля в явной форме.

Дисперсионное уравнение. Уравнения Максвелла в средах с анизотропией тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей с учетом пространственной дисперсии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \mathrm{rot}(b * u_2), \quad \mathrm{div} u_1 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\mathrm{rot}(a * u_1), \quad \mathrm{div} u_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_1 = D$, $u_2 = B$ – вектор-функции электрического смещения и магнитной индукции, связаны с напряженностями электрического E и магнитного H полей так называемыми материальными уравнениями $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$.

Символ $*$ в уравнениях (1) и всюду ниже означает операцию свертки по пространственным переменным, так что, например,

$$(a * u)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} a(x-y)u(t,y)dy,$$

и аналогично определяется $(b * u)$. Кроме того, матрицы $a(x)$ и $b(x)$ свзаны с $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ соотношениями

$$\hat{a}(k) = \hat{\varepsilon}^{-1}(k), \quad \hat{b}(k) = \hat{\mu}^{-1}(k), \quad k \in \mathbb{R}^3,$$

где символ "$\hat{\ }$" означает преобразование Фурье $\hat{a}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} a(x)e^{ikx}dx$. В силу условий, принятых далее для $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$, определение $a(x)$ и $b(x)$ корректно.

В фиксированной системе координат матрицы третьего порядка a и b, в качестве элементов которых допускаются и обобщенные функции, удовлетворяют следующим условиям:

(i) они симметричны $\varepsilon^T(x) = \varepsilon(x)$, $\mu^T(x) = \mu(x)$, где символ "T" означает операцию транспонирования;

(ii) они четны $\varepsilon(-x) = \varepsilon(x)$, $\mu(-x) = \mu(x)$ и однородны степени (–3), так что $\varepsilon(tx) = t^{-3}\varepsilon(x)$, $t > 0$, и аналогично для $\mu(x)$;

(iii) их преобразования Фурье $\hat{\varepsilon}(k)$, $\hat{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{R}^3$ суть положительно определенные матрицы при каждом $k \in \mathbb{R}^3$.

Если начальное поле $u_k(0,x)$, $k = 1,2$ известно, так что

$$u_k(0,x) = g_k(x), \quad k = 1,2, \tag{2}$$

где заданные поля $g_k(x)$, $k = 1,2$ соленоидальны, то требуется также, чтобы $g_k(x)$ убывали на бесконечности быстрее любой степени $|x|^{-k}$ вместе со всеми своими производными, другими словами, принадлежали известному пространству Шварца $S(\mathbb{R}^3)$.

Для отыскания дисперсионного уравнения применим к рассматриваемой задаче метод Фурье. Применяя преобразование Фурье по пространственным переменным, придем к параметрической (по k) системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat{u}_1}{dt} = i[k]\hat{b}(k)\hat{u}_2, \quad (k, \hat{u}_1) = 0, \\ &\frac{d\hat{u}_2}{dt} = -i[k]\hat{a}(k)\hat{u}_1, \quad (k, \hat{u}_2) = 0, \\ &\hat{u}_k(0, k) = \hat{g}_k(k), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Ее решение дается формулами

$$\hat{u}_1(t, k) = \hat{g}_1(k)\cos t\omega_+(k) + i[k]\hat{b}(k)\hat{g}_2(k)\frac{\sin t\omega_-(k)}{\omega_-(k)},$$

$$\hat{u}_2(t, k) = -[k]\hat{a}(k)\hat{g}_1(k)\frac{\sin t\omega_+(k)}{\omega_+(k)} + \hat{g}_2(k)\cos t\omega_-(k),$$

где функции $\omega_\pm(k)$ определены согласно формулам

$$\omega_\pm^2(k) = (p(k) \pm \sqrt{d(k)})/2, \quad d(k) = p^2(k) - 4q(k),$$

и где, в свою очередь, функции $p(k)$ и $q(k)$ суть

$$p(k) = \operatorname{tr}([k]\hat{b}(k)[k]\hat{a}(k)), \quad q(k) = (a^*(k)k, k)(b^*(k)k, k).$$

Здесь принято обозначение $\operatorname{tr} a$ для следа матрицы – суммы ее диагональных элементов и для любого $k \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$ кососимметрическая матрица $[k]$ есть

$$[k] = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от классического случая, когда ε и μ имеют вид $\varepsilon(x) = \varepsilon\delta(x)$ и $\mu(x) = \mu\delta(x)$, где ε и μ – постоянные матрицы, а $\delta(x)$ – функция Дирака, здесь p и q уже не являются соответственно квадратичной и биквадратичной формами. Это вносит ряд усложнений в теорию, однако в предположениях (i)-(iii), которые, как нетрудно видеть, наследуют все основные свойства коэффициентов системы уравнений кристаллооптики в классическом случае, удается распространить результаты классического случая на рассматриваемый.

Именно, предполагая в дополнение к сказанному, что все собственные значения симметричной, положительно определенной матрицы

$$s(k) = a(k)^{-\frac{1}{2}}b(k)a(k)^{-\frac{1}{2}}$$

различны, ее нормированные собственные векторы образуют ортогональную матрицу $e(k)$, приводящую $s(k)$ к диагональному виду при всех $k \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$

$$e^{-1}(k)s(k)e(k) = \nu(k), \tag{4}$$

где $\nu(k) = \mathrm{diag}(\nu_1(k), \nu_2(k), \nu_3(k))$.

Замена переменных $\zeta = e^*(k)(\hat{a}^*(k))^{\frac{1}{2}}k$ приводит функцию $d(k)$ к канонической форме

$$d(\zeta) = d_+(\zeta)d_-(\zeta),$$

где $d_\pm(\zeta) = (\nu_j(k) - \nu_i(k))\zeta_k^2 + \left(\sqrt{\nu_j(k) - \nu_i(k)}\zeta_i \pm \sqrt{\nu_k(k) - \nu_i(k)}\zeta_j\right)^2$.

Отличие от "обычной" кристаллооптики состоит в том, что теперь собственные числа $\nu(\zeta)$ являются функциями (однородными, степени нуль) точки $\zeta \in R^3$. Множество нулей функции $d(\zeta)$ совпадают с объединением прямых

$$L_+ : \quad \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) : \zeta_k = 0, \sqrt{\nu_j(k) - \nu_i(k)}\zeta_i + \sqrt{\nu_k(k) - \nu_i(k)}\zeta_j = 0\} \quad \text{и}$$

$$L_- : \quad \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) : \zeta_k = 0, \sqrt{\nu_j(k) - \nu_i(k)}\zeta_i - \sqrt{\nu_k(k) - \nu_i(k)}\zeta_j = 0\}.$$

Это действительно прямые, поскольку $\nu(t\zeta) = \nu(\zeta)$, $t > 0$.

Поскольку коэффициенты $\hat{a}(k)$, $\hat{b}(k)$ однородны нулевой степени, то предыдущие рассуждения показывают, что можно ввести аффинные координаты $\zeta = \omega\eta$, и уравнение нормальной поверхности

$$\sigma : \quad 1 - p(\eta) + q(\eta) = 0,$$

которая теперь не является алгебраической поверхностью. Однако она также представляется в виде объединения двух "кусков"

$$\sigma_\pm : \quad p(\eta) \pm \sqrt{q(\eta)} = 2.$$

Отличие от классического случая состоит в том, что теперь коэффициенты "квадратичных форм" $(\hat{a}^*k, k)$ и $(\hat{b}^*k, k)$ зависят от направлений, а не постоянны. Сказанное немедленно приводит, ввиду полученных ранее формул для преобразований Фурье $\hat{u}_1(t, k)$ и $\hat{u}_2(t, k)$, к явным формулам, описывающим динамику электромагнитного поля

$$u_1(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_+g_1)(t, x) + t(M_-\mathrm{rot}\, b * g_2)(t, x),$$

$$u_2(t, x) = -t(M_+\mathrm{rot}\, a * g_1)(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_+g_2)(t, x).$$

Эти формулы являются естественным обобщением полученных ранее [1] формул в случае классической кристаллооптики и аналогом формул Кирхгофа в случае скалярного волнового уравнения.

Все эти результаты остаются в силе, если имеются кратные корни $\nu_i(\zeta)$, однако в предположении, что кратность не меняется в зависимости от точки $\zeta \in \mathbb{R}^3$.

Таким образом, и при учете пространственной дисперсии может быть дана классификация таких сред по их оптическим свойствам. Остается в силе, конечно с соответствующими изменениями, принцип Гюйгенса, а также различные эффекты, например, явление конической рефракции. На подробностях пока не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж у р а Н. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 6, 31 (2006).

Поступила в редакцию 3 октября 2006 г.