

УДК 53.072, 519.856

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В ГАРМОНИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ЛОВУШКАМИ

И. А. Лубашевский, Н. Г. Гусейн-заде, Э. М. Черниговская, Л. И. Осипова

В работе рассматриваются характерные особенности нового класса неравновесных фазовых переходов – фазовых переходов, обусловленных динамическими ловушками. Исследование проведено для отдельного осциллятора с динамическими ловушками, которые располагаются в малой окрестности оси x фазовой плоскости $\{x, v = dx/dt\}$. Проведен численный анализ динамики этой системы, выявлен механизм и условия возникновения различных динамических состояний. Продемонстрировано, что динамика такого осциллятора может представлять собой ряд случайных скачкообразных переходов между долгоживущими состояниями. Для возникновения этих состояний необходимо наличие случайных сил, интенсивность которых находится в пределах некоторого ограниченного интервала. Если интенсивность случайных сил мала или велика, фазовые переходы, вызванные динамическими ловушками, не происходят.

К настоящему времени выявлен ряд механизмов возникновения фазовых переходов в неравновесных системах, обусловленных действием *нелинейных* случайных сил [1, 2]. При этом такие случайные силы могут быть как внешними, так и индуцированными динамическим хаосом. В данной работе исследуются неравновесные фазовые переходы нового типа, которые обусловлены действием *линейных* случайных сил в системах с динамическими ловушками. Динамическими ловушками мы называем низкоразмерные области в соответствующем фазовом пространстве, где все кинетические коэффициенты принимают аномально малые (большие) значения. Такие свойства широко встречаются

в социальных и экономических системах, где важную роль играет человеческий фактор. Однако динамические ловушки встречаются также и в физических системах, например, они могут обуславливать немонотонную релаксацию структур в металлических сплавах типа PD-Eg после их насыщения водородом [3].

Фазовые переходы, обусловленные динамическими ловушками, проявляются в формировании континуума долгоживущих кооперативных состояний. При этом механизм образования кооперативных состояний принципиально отличается от классического, основанного на свойствах термодинамического потенциала. Целью настоящей работы является исследование фундаментальных особенностей этих неравновесных фазовых переходов на основе численного моделирования динамики отдельного осциллятора с динамическими ловушками.

Модель. Как уже отмечалось ранее, под областью динамических ловушек (ОДЛ) понимается “низкоразмерная” (занимающая небольшую часть фазового пространства) фактически неограниченная область фазового пространства, в пределах которой все характерные временные масштабы динамики системы существенно превышают их значения в остальной части фазового пространства. Для изучаемого одномерного осциллятора фазовым пространством является плоскость $\{x, v\}$ его координаты x и скорости движения $v = dx/dt$. В данном случае область динамических ловушек отождествляется с некоторой окрестностью оси x , так как вблизи оси x скорость движения осциллятора мала по ее определению и динамика осциллятора испытывает стагнацию, если его эффективная “масса” (кинетический коэффициент) принимает достаточно большие значения.

Ширина ϑ_t этой окрестности оси x (ширина ОДЛ) полагается малой по сравнению с характерными размерами области локализации системы в фазовом пространстве. Именно последняя особенность и позволяет считать ОДЛ “низкоразмерной” структурой. Следует также обратить внимание, что “регулярная” сила при пересечении ОДЛ не меняет своего направления и влияние динамических ловушек сводится только к ее подавлению. В этом смысле механизм формирования новых фаз в системах с динамическими ловушками принципиально отличается от механизма классических фазовых переходов. В последних при изменении управляющего параметра изменяется структура регулярной силы, возникают новые устойчивые точки фазового пространства. В данном же случае, при максимальном эффекте динамических ловушек регулярная сила в ОДЛ только лишь достигает нулевых значений. Иными словами, в предельном случае ОДЛ

– это “низкоразмерный” континуум седловых точек регулярной силы, в окрестности которого динамика системы контролируется случайными силами.

Имея в виду вышесказанное, рассматривается следующая модель осциллятора с динамическими ловушками:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (1a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \Omega(v) \left[x + \frac{\sigma}{\omega_0} v \right] + \epsilon_0 \xi_v(t), \quad (1b)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора, σ – коэффициент затухания, а случайная Ланжевеновская сила интенсивности ϵ_0 задается белым шумом $\xi_v(t)$:

$$\langle \xi_v(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_v(t) \xi_v(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (2)$$

Фактор $\Omega = \Omega(v)$, который зависит только от скорости v осциллятора и играет роль обратной величины эффективной массы, описывает эффект динамических ловушек, а именно,

$$\Omega(v) = \frac{v^2 + \Delta^2 \vartheta_t^2}{v^2 + \vartheta_t^2}. \quad (3)$$

Здесь параметр ϑ_t характеризует ширину зоны действия ловушки, а Δ – ее эффективность (при $\Delta = 1$ – ловушка отсутствует, а при $\Delta = 0$ – регулярная сила полностью подавлена при нулевой скорости осциллятора). Когда скорость осциллятора мала, регулярная сила ослабевает, и его движение в большой степени определяется случайной силой с амплитудой ϵ_0 .

Численное моделирование. Для численного анализа динамики системы удобно перейти к безразмерным переменным $z = x\omega_0/\vartheta_t$ и $u = v/\vartheta_t$, в терминах которых уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\frac{dz}{dt} = u, \quad (4a)$$

$$\frac{du}{dt} = -\Omega(u) (z + \sigma u) + \epsilon \xi(t), \quad (4b)$$

где $\Omega(u) = (u^2 + \Delta^2)/(u^2 + 1)$ и амплитуда случайной силы есть $\epsilon = \epsilon_0/(\sqrt{\omega_0}\vartheta_t)$. Обратим внимание, что данная система в отсутствие шума имеет только одну устойчивую

стационарную точку $\{z = 0, u = 0\}$. Область динамических ловушек (ОДЛ) в фазовом пространстве $\{x, v\}$ представлена на рис. 1.

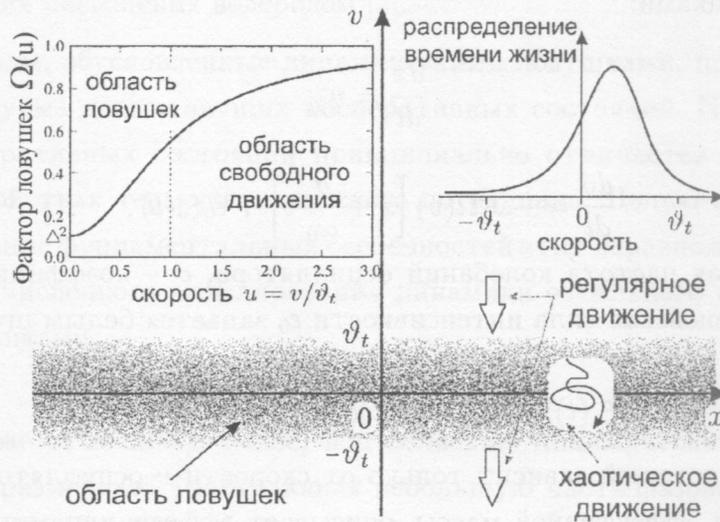


Рис. 1. Область динамических ловушек (затемненный участок, ОДЛ) в фазовом пространстве $\{x, v\}$. При небольшой скорости частицы регулярная сила подавлена, и движение носит в большой степени случайный характер. В ОДЛ распределение скорости асимметрично, из-за чего возникает эффективная “накачка” энергии в осциллятор.

После сравнения ряда методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений в применении к данной системе был выбран четырехшаговый стохастический метод Рунге–Кутта “CL” с сильным порядком сходимости 1.5 [4, 5]. В качестве генератора случайных чисел использовался генератор псевдослучайных чисел, основанный на рекурсии числа со сдвигом вдоль разрядной сетки.

Численное моделирование показало, что в данной системе происходит фазовый переход. Он проявляется в том, что функция распределения $P(u, z)$ изменяет форму от унимодальной к бимодальной. Функция распределения $P(u, z)$ находилась численно путем вычисления суммарного времени, в течение которого система локализована внутри данной ячейки на плоскости $\{u, z\}$. В отсутствие динамических ловушек ($\Delta = 1$) система представляет собой обычный затухающий осциллятор с шумом. Функция распределения скорости и координаты в фазовом пространстве является гауссовой (рис. 2) с максимумом в области нулевых значений. Как можно видеть, с увеличением эффективности динамических ловушек, в точке $\Delta < \Delta_c$ происходит фазовый переход, при

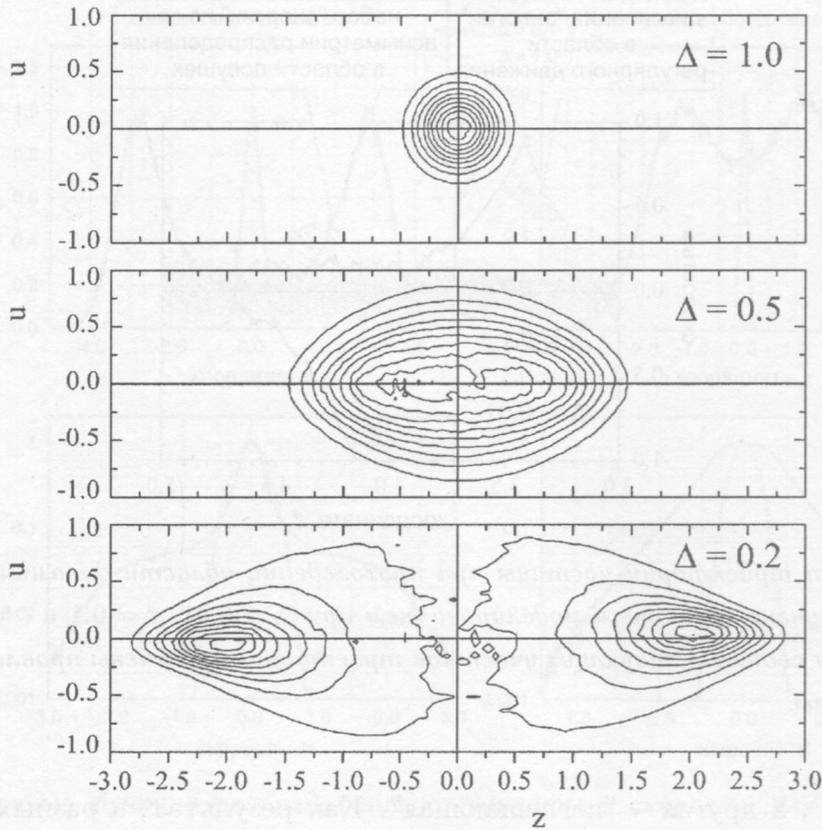


Рис. 2. Эволюция функции распределения $P(u, z)$ в зависимости от эффективности динамических ловушек Δ (здесь $\sigma = 0.1$ и $\epsilon = 0.1$).

котором функция распределения принимает бимодальную форму с двумя максимумами. Как следует из рис. 2 величина $\Delta_c \approx 0.5$ при $\sigma = 0.1$ и $\epsilon = 0.1$.

Механизм фазового перехода. Механизм фазового перехода можно понять, обращаясь к рис. 3. Вне области динамических ловушек система представляет собой затухающий осциллятор. В области динамических ловушек регулярная сила подавляется (фактор Ω) и, как результат, внутри ОДЛ динамика системы становится стохастической вследствие действия слабой Ланжевеновской силы. При этом, однако, верхняя и нижняя эффективные границы ОДЛ отличаются значительно по своим свойствам. Рассмотрим, например, движения осциллятора в ОДЛ при $z > 0$. Если осциллятор, блуждая в этой области, достигает верхней границы, регулярная сила возвращает его обратно внутрь ОДЛ. Для нижней границы эта ситуация приводит к обратному эффекту – осциллятор покидает ОДЛ. Таким образом можно сказать, что одна из эффективных границ ОДЛ

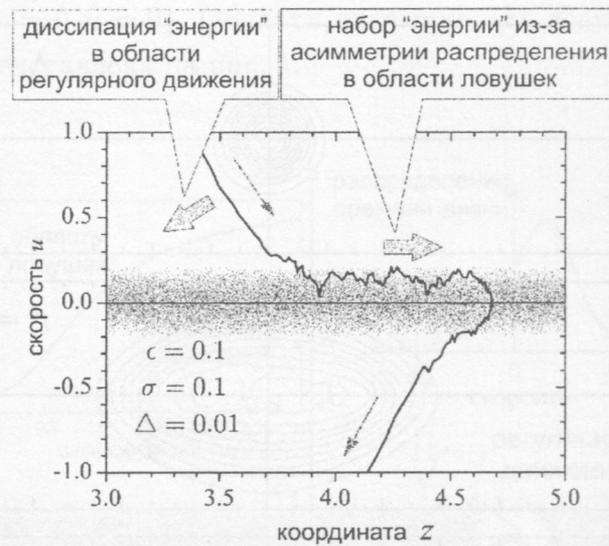


Рис. 3. Фрагмент траектории частицы при прохождении области динамической ловушки (траектория получена численным моделированием при $\Delta = 0.01$, $\sigma = 0.1$ и $\epsilon = 0.1$). Большие стрелками для соответствующих участков траектории отмечены направления изменения «энергии» системы.

– «отражающая», а другая – «поглощающая». Как результат, в разных точках ОДЛ осциллятор проводит в среднем не одинаковое время, что проиллюстрировано на правой верхней вставке к рис. 1. При этом максимум функции распределения смещается и располагается при значении скорости, не равном нулю ($u \neq 0$), что отчетливо видно на нижней диаграмме рис. 2.

Неравнозначность верхней и нижней частей ОДЛ приводит к асимметрии распределения скоростей осциллятора в ОДЛ, в частности, для $z > 0$ среднее значение скорости осциллятора больше нуля при прохождении его через ОДЛ. Как следствие, возникает накопление «энергии» осциллятора и его «раскачка» (рис. 3). Тем самым совместное действие динамических ловушек и случайной силы приводит к тому, что равновесное состояние с $z = 0$ и $u = 0$ (лежащее в ОДЛ) становится неустойчивым и возникает бимодальное распределение. Данная функция распределения обладает рядом аномальных свойств. Рисунок 4 их визуализирует на примере частных функций распределения $P(z)$ и $P(u)$. Как и должно быть, фазовый переход сопровождается изменением модальности $P(z)$. При этом распределение по скоростям $P(u)$ также приобретает аномальные свойства, а именно, его вид может либо стать бимодальным, либо значительно отклоняться от гауссового распределения: $P(u) \propto \exp(-|u|)$.

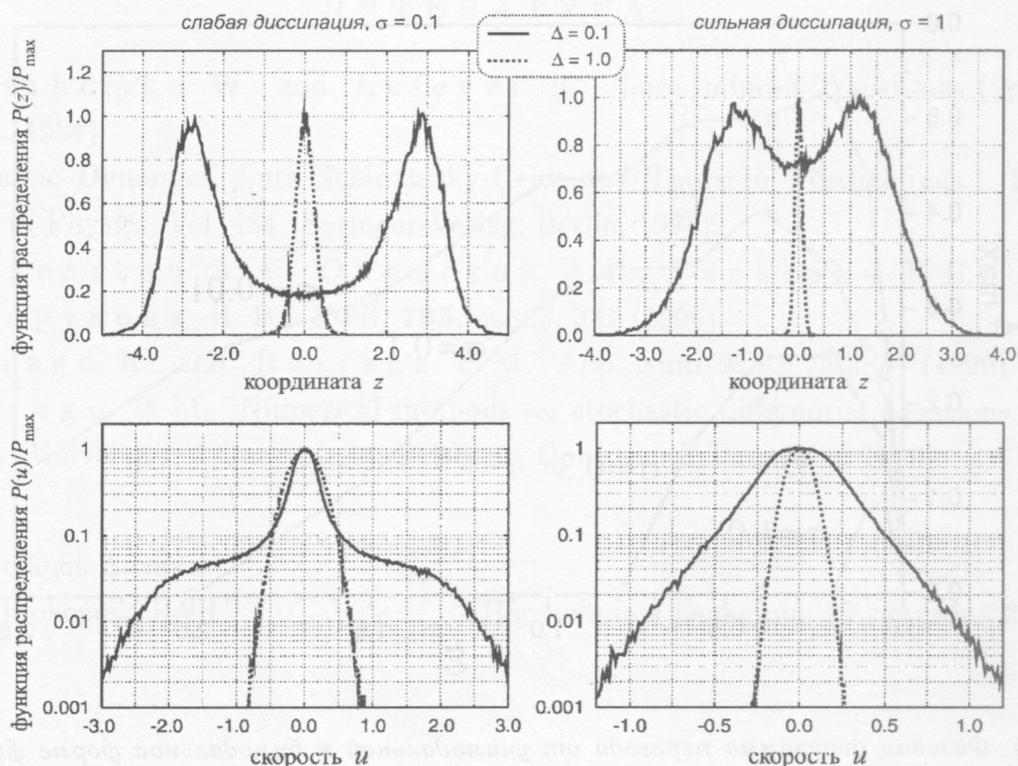


Рис. 4. Частичные функции распределения координаты и скорости для разных значений параметров системы, в частности, $\Delta = 1.0$ – отсутствие ловушек, $\Delta = 0.1$ – наличие ловушек высокой эффективности.

Рисунок 5 изображает найденную фазовую диаграмму перехода от унимодального к бимодальному распределению. Отсюда следует, что фазовый переход происходит только когда интенсивность случайной силы принадлежит некоторому интервалу значений, ограниченному снизу и сверху. Таким образом, при минимальной эффективности динамической ловушки Δ существует значение интенсивности ϵ_0 шума, оптимальное для осуществления фазового перехода. Это значение обратно пропорционально коэффициенту трения и уменьшается с его увеличением.

Проведено исследование формирования динамических фазовых состояний для отдельного осциллятора с динамическими ловушками. Выявлен механизм и условия возникновения *неравновесного* фазового перехода, который обусловлен взаимным действием динамических ловушек и случайной силой. Показано, что случайные силы играют конструктивную роль – их наличие необходимо для возникновения рассматриваемых фазовых переходов. При этом интенсивность случайных сил должна находиться в рам-

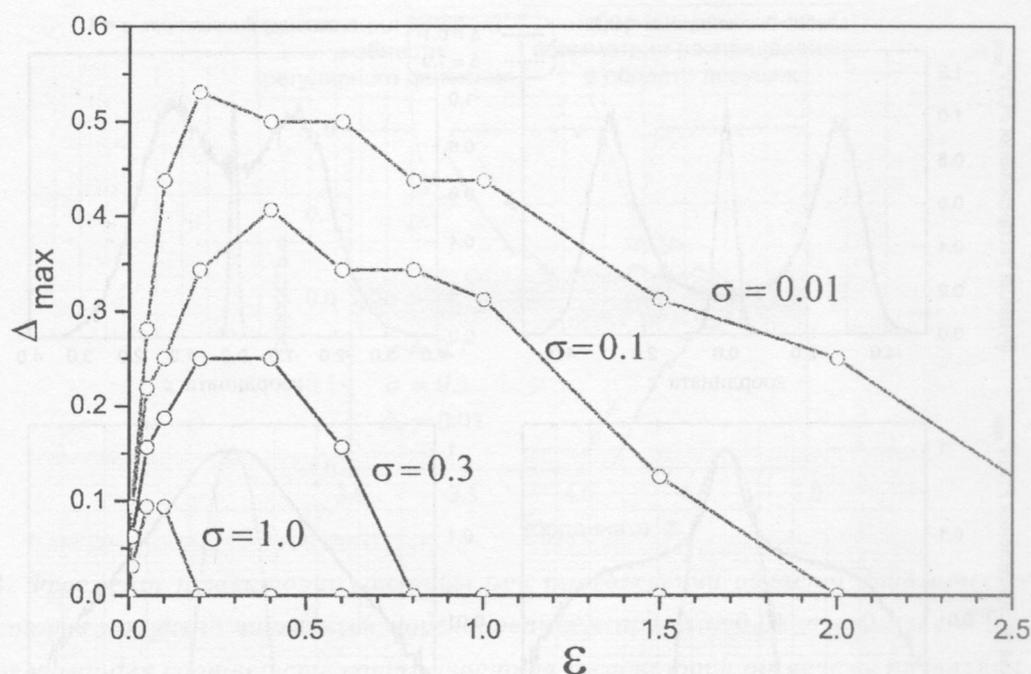


Рис. 5. Фазовая диаграмма перехода от унимодальной к бимодальной форме функции распределения. Зависимость эффективности ловушки, при которой происходит переход $\Delta = \Delta_{max}$, от интенсивности белого шума ϵ .

ках некоторого ограниченного интервала; если их интенсивность мала или велика, фазовые переходы, индуцированные динамическими ловушками, не возникают.

В данном аспекте найденный механизм фазового перехода принципиально отличается от классических, обусловленных изменением структуры регулярных сил. В рассматриваемой системе существует только одно устойчивое положение равновесия с $u = 0$ и $z = 0$, которое не зависит от значений параметров системы. Фазовый переход фиксируется по трансформации функции распределения системы в плоскости $\{z, u\}$ от унимодальной к бимодальной форме. При этом частичная функция распределения скоростей системы также приобретает аномальные свойства, ее форма либо становится бимодальной, либо значительно отклоняется от гауссовой.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 5-07-90248 и 5-01-00723.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Horsthemke W. and Lefever R. Noise-Induced Transitions (Springer, Berlin, 1984).
- [2] Stochastic Dynamics, Lutz Schimansky-Geier and Thorsten Pöschel (eds.), Lecture Notes in Physics, Vol. 484 (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- [3] Кацнельсон А. А., Олемской А. И., Ревкевич Г. П., Сухорукова И. В. УФН, **165**, вып.3, 331 (1995).
- [4] Burrage K. and Burrage P. M. App. Num. Math., **22**, 81 (1996).
- [5] Burrage P. M. Numerical methods for stochastic differential equations, Ph.D. Thesis (University of Queensland, Brisbane, Queensland, Australia, 1999).

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 19 сентября 2006 г.