УДК 533.95

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ В ЛОВУШКЕ ПАУЛЯ

А. М. Игнатов

В третьем порядке теории возмущений получено выражение для усредненного гамильтониана, описывающего классическое движение двух частиц в ловушке Пауля. Возникающие малые поправки интерпретируются как перенормировка массы и заряда.

Известно, что на заряженную частицу с зарядом q и массой m, помещенную в переменное электрическое поле вида $\mathbf{E}(\mathbf{r})\cos(\omega t)$, действует усредненная сила Миллера

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4m\omega^2}\nabla|\mathbf{E}|^2 = -\nabla U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Впервые в таком виде выражение для усредненной силы было получено в [1], хотя некоторые частные случаи исследовались намного раньше. Аналогичные усредненные силы возникают и в различных моделях плазмы как сплошной среды [2]. На силе Миллера (1) основано множество физических эффектов и приборов, перечислять которые нет ни нужды, ни возможности.

Остановлюсь лишь на квадрупольной ловушке Пауля [3], которая используется во многих экспериментах по удержанию ансамблей ионов. В ловушке Пауля специально подобранная конфигурация электродов создает в окрестности некоторой точки распределение электрического потенциала $\phi(\mathbf{r})$, квадратично зависящее от координат. Поскольку вдали от электродов $\Delta\phi = 0$, в подходящей системе координат потенциал можно записать в виде $\phi(\mathbf{r}) = \alpha(x^2 + y^2 - 2z^2)$, где величина α характеризует приложенное к электродам напряжение. Если последнее меняется во времени по гармоническому закону $\alpha = \alpha_0\cos(\omega t)$, то усредненная сила (1) определяется потенциалом вида

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q^2\alpha_0^2}{m\omega^2}(x^2 + y^2 + 4z^2), \tag{2}$$

т.е. формируется потенциальная яма, удерживающая одноименно заряженные ионы.

Динамика ансамблей частиц в потенциале вида (2) изучена довольно подробно. Наиболее детально удается исследовать случай двух взаимодействующих частиц в ловушке Пауля (напр., [4–8]). В упомянутых работах исследовалась либо усредненная динамика двух частиц в потенциале (2), взаимодействующих посредством кулоновского потенциала, либо численно решались уравнения движения в осциллирующем поле.

Сила (1) возникает в результате усреднения движения отдельной частицы по высокочастотным колебаниям. Однако не очевидно, что после усреднения закон взаимодействия двух частиц остается неизменным. Поскольку координаты частиц имеют вид $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{0\alpha}(t) + \mathbf{r}_{1\alpha}(t)\cos(\omega t) + \ldots$, где $\alpha = 1, 2$, а $\mathbf{r}_{0\alpha}(t)$, $\mathbf{r}_{1\alpha}(t)$ – медленно меняющиеся в масштабе $1/\omega$ функции, энергия взаимодействия двух зарядов $q_1q_2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ после усреднения должна отличаться от кулоновской. Цель настоящей работы заключается в выяснении характера усредненного взаимодействия частиц.

Исходные уравнения. Для простоты рассматриваются две одинаковые частицы с массами m и зарядами q в осциллирующем потенциале вида $\phi_0(\mathbf{r}) = \alpha r_i A_{ij} r_j$, где A_{ij} – диагональная матрица, $A_{xx} = A_{yy} = 1$, $A_{zz} = -2$. Гамильтониан системы записывается в виде

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{q^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + q\left[\phi_0(\mathbf{r}_1) + \phi_0(\mathbf{r}_2)\right]\cos(\omega t). \qquad (3)$$

Удобно ввести безразмерную амплитуду внешнего поля $\epsilon = \alpha q/(m\omega^2) \ll 1$, по которой в дальнейшем будет проводиться разложение в ряд теории возмущений. Однако прежде, чем заниматься теорией возмущений, необходимо привести исходный гамильтониан к надлежащему виду. Во-первых, очевидно, что в квадратичном потенциале движение центра масс двух частиц не зависит от их относительного движения. Поскольку в первую очередь нас интересует именно относительное движение, перейдем к новым координатам и импульсам, изменяя заодно их характерные масштабы, $\mathbf{r} = \epsilon^{2/3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{p} = \epsilon^{-1/3}1/2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$. При таком выборе масштабов потенциальная энергия частиц (2) и их энергия взаимодействия оказываются одного порядка. Во-вторых, для неавтономной системы с гамильтонианом (3) удобно перейти к расширенному фазовому пространству, вводя быстую фазу $\theta = \omega t$ и сопряженный ей обобщенный импульс J. Тогда движение пары частиц относительно их центра тяжести определяется каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$H = \omega J + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r_i A_{ij} r_j \cos\theta + \epsilon\left(\frac{p^2}{2\mu} + \frac{q^2}{r}\right), \qquad (4)$$

где $\mu = m/2$ – приведенная масса.

Разложение по ϵ существенно упрощается, если невозмущенная часть гамильтониана (4) имеет максимально простой вид. Перейдем к новым координатам $\bar{\mathbf{r}}, \bar{\theta}$ и сопряженным им импульсам $\bar{\mathbf{p}}, \bar{J}$ при помощи производящей функции

$$F_0(\bar{J}, \bar{\mathbf{p}}, \theta, \mathbf{r}) = \bar{J}\theta + \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mu\omega \sin\theta r_i A_{ij} r_j. \tag{5}$$

При этом координаты $\bar{\theta} = \theta, \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ не изменяются, а импульсы имеют вид:

$$J = \bar{J} - \frac{1}{2}\mu\omega \cos\theta \mathbf{r} \cdot A \cdot \mathbf{r}, \tag{6}$$

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} - \mu\omega \sin\theta A \cdot \mathbf{r}. \tag{7}$$

В новых переменных гамильтониан имеет вид:

$$\bar{H} = \omega\bar{J} + \epsilon \left[\frac{1}{2\mu}\left(\bar{\mathbf{p}} - \mu\omega \sin\theta A \cdot \bar{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{q^2}{\bar{r}}\right]. \tag{8}$$

Это выражение используется как основа для вывода усредненного гамильтониана. Для сокращения записи черточки над новыми переменными в дальнейшем опускаются.

Теория возмущений. В дальнейшем используется каноническая теория возмущений Пуанкаре–Цейпеля, описанная во многих книгах по механике (напр., [9]). Рецепт заключается в поиске подходящей канонической замены от старых переменных $p_i(\equiv \bar{p}_i)$, $r_i(\equiv \bar{r}_i)$ к новым переменным p'_i, r'_i, определяемой производящей функцией вида

$$S(\mathbf{p}', J', \mathbf{r}, \theta) = \sum_{n=0} \epsilon^n S_n(\mathbf{p}', J', \mathbf{r}, \theta), \tag{9}$$

причем

$$S_0(\mathbf{p}', J', \mathbf{r}, \theta) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r} + J'\theta. \tag{10}$$

Новый гамильтониан H' также разлагается в ряд по степеням ϵ:

$$H'(\mathbf{p}', J', \mathbf{r}', \theta') = \sum_n \epsilon^n H_n(\mathbf{p}', J', \mathbf{r}', \theta'). \tag{11}$$

В каждом порядке теории возмущений производящая функция S_n, считающаяся периодической функцией фазы θ, выбирается так, чтобы соответствующий член разложения гамильтониана H_n (11) не зависел от θ'.

Очевидно, что $H_0 = \omega J'$. Легко убедиться, что усредненный гамильтониан первого порядка равен:

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{q^2}{r} + \frac{1}{4}\mu\omega^2(\rho^2 + 4z^2), \tag{12}$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, а соответствующий член разложения производящей функции (9) имеет вид:

$$S_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \theta) = -\mathbf{p} \cdot A \cdot \mathbf{r} \cos\theta + \frac{1}{8}\mu\omega \sin(2\theta)(\rho^2 + 4z^2). \tag{13}$$

Зависимость от координат потенциальной энергии, входящей в гамильтониан (13), аналогична (2). Таким образом, первый член канонической теории возмущений совпадает с выражением, получаемым при помощи непосредственного усреднения уравнений движения.

Вычисления в следующих порядках оказываются гораздо более громоздкими, поэтому приведу лишь окончательные результаты. Гамильтониан второго порядка H_2 тождественно обращается в нуль при помощи производящей функции

$$S_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \theta) = \frac{\sin\theta}{\mu\omega}\mathbf{p} \cdot A \cdot \mathbf{p} + \frac{3}{8}\cos(2\theta)\mathbf{p} \cdot A^2 \cdot \mathbf{r} + \tag{14}$$

$$+ \frac{q^2}{\omega r^3}\sin\theta \mathbf{r} \cdot A \cdot \mathbf{r} - \frac{\mu\omega}{24}(9\sin\theta + \sin(3\theta))\mathbf{r} \cdot A^3 \cdot \mathbf{r}.$$

Здесь и далее в (16) через A^2, A^3 и т.д. обозначены соответствующие степени матрицы A.

Наконец, усредненный гамильтониан третьего порядка

$$H_3(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{4\mu} + \frac{p_z^2}{\mu} - q^2\frac{27}{4}\frac{\rho^2 z^2}{r^5} + \mu\omega^2\frac{17}{64}(\rho^2 + 16z^2) \tag{15}$$

получается при помощи производящей функции

$$S_3(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \theta) = -\frac{1}{72}\cos\theta(19\cos(2\theta) + 112)\mathbf{p} \cdot A^3 \cdot \mathbf{r} - \frac{5\sin(2\theta)}{16\mu\omega}\mathbf{p} \cdot A^2 \cdot \mathbf{p} + \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{384}\mu\omega\cos(\theta)(237\sin(\theta) + 11\sin(3\theta))\mathbf{r} \cdot A^4 \cdot \mathbf{r} +$$

$$+ \frac{q^2}{16\omega r^5}\sin(2\theta)(2z^4 - 137z^2\rho^2 + 5\rho^4) +$$

$$+ \frac{q^2\cos\theta}{\mu\omega^2 r^5}\left[(10z^2 + \rho^2)(p_x x + p_y y) - (2z^2 + 11\rho^2)p_z z\right].$$

Опуская несущественный член H_0, запишем результирующий усредненный гамильтониан как

$$H_{eff} = \epsilon\left[K(\mathbf{p}) + Q(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\right], \tag{17}$$

где кинетическая энергия имеет вид

$$K(\mathbf{p}) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\mu}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2\mu}\left(1 + 2\epsilon^2\right). \tag{18}$$

Из этого выражения следует, что осцилляторное движение частиц приводит к своеобразной перенормировке массы, которая уменьшается и становится анизотропной, – результат для классической физики довольно необычный. Перенормировка массы не зависит от взаимодействия частиц и, разумеется, возникает и для отдельной частицы в переменном поле.

Член $Q(\mathbf{r})$ в (17), описывающий взаимодействие частиц,

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{r}\left(1 - \epsilon^2 \frac{27}{4}\frac{z^2\rho^2}{r^4}\right) \tag{19}$$

оказывается однородной функцией радиуса степени -1. Это выражение также можно интерпретировать как перенормировку заряда, который теперь зависит от угла между вектором $\mathbf{r}$ и осью z. В результате усреднения по быстрой фазе у частицы возникают, кроме того, дипольный и высшие мультипольные моменты, но соответствующие члены в энергии взаимодействия проявляются только в более высоких порядках теории возмущений. Наконец, последний член в (17) представляет собой потенциал силы Миллера

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4}\mu\omega^2\left\{\rho^2\left(1 + \frac{17}{16}\epsilon^2\right) + z^2(4 + 17\epsilon^2)\right\}, \tag{20}$$

который по-прежнему остается квадратичной функцией координат.

Подробное описание динамики системы с гамильтонианом (17) должно быть предметом отдельного исследования. Отмечу лишь, что в очевидных частных случаях движения вдоль оси z и в плоскости (x, y) траектории сохраняют устойчивость. Наиболее существенный результат настоящей заметки заключается в обнаружении перенормировки массы и заряда частиц при движении в осциллирующем поле.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Миллер, Изв. вузов: Радиофизика **1**, 166 (1985).

[2] Л. М. Горбунов, УФН **109**, 631 (1973).

[3] W. Paul, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).

[4] R. Blümel et al., Phys. Rev. A, **40**, 808 (1989).

[5] G. Baumann and T. F. Nonnenmacher, Phys. Rev. A, **46**, 2682 (1992).

[6] D. Farelly and J. E. Howard, Phys. Rev. A, **49**, 1494 (1994).

[7] Shen Jing-Ling et al., Phys. Rev. A, **55**, 2159 (1997).

[8] M. Koštrun, W. W. Smith, and J. Javanainen, Phys. Rev. A, **57**, 2895 (1998).

[9] А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика* (Мир, М., 1984).

Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 4 февраля 2008 г.