

УДК 681.7.068.4

МОДЫ БРЭГГОВСКОГО ВОЛОКНА СО СТЕНКАМИ ИЗ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ: СКАЛЯРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Р. М. Фещенко¹, А. В. Виноградов

В работе развита аналитическая теория цилиндрических слабоконтрастных брэгговских световодов – брэгговских волокон, основанная на представлении тонких размытых слоев дельта-функциями. В скалярном приближении выведено дисперсионное уравнение для брэгговского световода с конечным числом слоев. Проведены численные расчеты полей мод и потерь для волокна с параметрами, близкими к реальному волокну, известному из литературы. Проведено сравнение с планарной моделью, выявившее значительное качественное сходство. Представленная модель брэгговских волокон является более реалистичной, чем модель с резкими границами слоев.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые при использовании простых оптических волокон, основанных на полном внутреннем отражении, в волоконной оптике существует ряд нерешенных проблем. Они связаны с необходимостью уменьшения нелинейности, управления дисперсией и количеством распространяющихся в волокне мод, реализацией одномодового режима в волокнах с большим диаметром сердцевины. Последнее необходимо для создания мощных одномодовых волоконных лазеров [1]. Для решения обозначенных проблем необходим переход к использованию световодов сложной конструкции: микроструктурированных и брэгговских. Если первые из них хорошо известны и находят практические применения, то вторые только начинают развиваться.

¹rusl@sci.lebedev.ru

Начало изучения брэгговских световодов было положено в работах [2, 3], где рассматривались световоды с полой сердцевиной и большим скачком показателя преломления между слоями. В более современных работах [4, 5] получила распространение другая конструкция, где сердцевина состоит из материала с показателем преломления немного меньшим (~ 0.001), чем в оболочке, а отражение обеспечивается структурой, состоящей из нескольких тонких concentрических слоев с показателем преломления немного выше (~ 0.01), чем в оболочке. Было экспериментально показано, что в таком волокне существуют брэгговские моды с относительно малыми радиационными потерями [4, 5]. Дальнейшее развитие подобных слабоконтрастных брэгговских световодов требует развития их теории и методов расчета.

Ранние попытки построения аналитической теории брэгговских световодов связаны с использованием приближения, где все слои имеют резкие границы [2, 3]. Однако из измерений известно, что такое приближение далеко от реальности – слои размываются, и получаются острые пики показателя преломления (см. рис. 2 и 8 в [5]). Также существуют методы численного поиска мод брэгговских световодов [6, 7]. В них уравнения поля заменяются определенной конечной разностной схемой, и задача сводится к отысканию собственных значений и собственных векторов матрицы очень большого размера. Хотя численные методы позволяют быстро и эффективно находить спектр мод брэгговских световодов, они не дают понимания физики световодов.

Развиваемая в настоящей работе теория основывается на представлении тонких размытых слоев с помощью дельта-функций [8]. На этой основе выводится и численно решается дисперсионное уравнение, находятся радиационные потери цилиндрических слабоконтрастных брэгговских световодов – брэгговских волокон. Для решения задачи используется скалярное приближение, применение которого допустимо, поскольку углы скольжения распространяющихся мод малы. Мал также и контраст показателя преломления [7]. Данная работа является продолжением нашей предыдущей работы [8], где были рассмотрены планарные волноводы со стенками, состоящими из дельта-функций. Одной из целей настоящей работы является сравнение планарной модели со скалярной цилиндрической и изучение применимости планарной модели для качественного анализа свойств оптических волокон.

Отражение от цилиндрической дельта-функциональной поверхности. Рассмотрим случай простого цилиндрического дельта-барьера. Будем использовать скалярное приближение, т.е. будем считать, что электрическое поле волны является чисто поперечным [7]. В скалярном приближении уравнения для электрического поля волны сводятся

к одному скалярному волновому уравнению, которое после выделения множителей, зависящих от азимутального угла ψ и координаты z , сводится к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 E}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dE}{d\rho} + \left(k^2 \varepsilon(\rho) - p^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) E = 0. \quad (1)$$

Здесь k – волновое число в вакууме, p – компонента волнового вектора вдоль волокна, а $n = 1, 2, \dots$ – азимутальное число. Найдем теперь матрицу перехода через цилиндрическую дельта-поверхность. Пусть диэлектрическая проницаемость имеет вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \alpha \delta(\rho - \rho_0), \quad (2)$$

где α – параметр размерности длины, равный интегралу от дельта-функции, а ρ_0 – обозначает положение дельта-функции. Будем также считать, что волна падает на многослойную структуру со стороны оси волокна. Далее запишем общее решение уравнения (1) в виде:

$$E(\rho) = \begin{cases} C_1 H_n^{(1)}(\kappa\rho) + C_2 H_n^{(2)}(\kappa\rho), & \rho < \rho_0 \\ C'_1 H_n^{(1)}(\kappa\rho) + C'_2 H_n^{(2)}(\kappa\rho), & \rho > \rho_0 \end{cases}, \quad \kappa = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - p^2}, \quad (3)$$

где $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ – функции Ганкеля. Матрица перехода \mathbf{M} по определению связывает коэффициенты без штриха с коэффициентами со штрихом в (3). Это можно записать как

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрица перехода находится из граничных условий при $\rho = \rho_0$. Первое из этих условий это, как и прежде, непрерывность поля, а второе – это величина скачка первой производной на границе. Второе условие следует из уравнения (1), откуда получаем:

$$E'(\rho_0 + 0) - E'(\rho_0 - 0) = -\alpha k^2 E(\rho_0). \quad (5)$$

Опуская детали, можно записать:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где элементы матрицы равны

$$\begin{aligned} m_{11} &= 1 + \frac{k^2 \alpha}{\kappa} \frac{1}{M_0}, & m_{12} &= \frac{k^2 \alpha}{\kappa} \frac{1}{M_0} \frac{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)}, \\ m_{21} &= -\frac{k^2 \alpha}{\kappa} \frac{1}{M_0} \frac{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)}, & m_{22} &= 1 - \frac{k^2 \alpha}{\kappa} \frac{1}{M_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

а параметр M_0 равен

$$M_0 = \frac{H_n^{(1)' }(\kappa \rho_0)}{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)} - \frac{H_n^{(2)' }(\kappa \rho_0)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)} = -\frac{H_{n+1}^{(1)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)} + \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)}. \quad (8)$$

Последнее равенство получено с учетом выражений для производных цилиндрических функций. Матрица \mathbf{M} обладает важным свойством, а именно ее определитель равен единице, что выражает собой сохранение потока. Из выражений (7) для элементов матрицы \mathbf{M} можно найти коэффициент отражения от дельта-поверхности (волна падает изнутри):

$$R = \frac{m_{21}}{m_{11}} = -\frac{\frac{k^2 \alpha}{\kappa} \frac{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)}}{-\frac{H_{n+1}^{(1)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(1)}(\kappa \rho_0)} + \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa \rho_0)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_0)} + \frac{k^2 \alpha}{\kappa}}. \quad (9)$$

Формула (9) служит цилиндрическим аналогом известной формулы для плоского случая [8].

Отражение от многослойной цилиндрической структуры, состоящей из дельта-функций. Рассмотрим теперь отражение электромагнитной волны от многослойной структуры, состоящей из N цилиндрических дельта-поверхностей. По-прежнему будем использовать скалярное приближение. Волна по-прежнему падает на многослойную структуру со стороны оси волокна. Диэлектрическая проницаемость имеет вид:

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_1 + \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \delta(\rho - \rho_m), \quad (10)$$

где возрастающая последовательность ρ_m определяет радиусы дельта-поверхностей многослойной структуры, а α_m – параметры размерности длины, определяющие “высоту” соответствующих дельта-функций. Решение уравнения (1) при каждом $n \geq 0$ может быть представлено как:

$$E(\rho) = C_{1(m)} \frac{H_n^{(1)}(\kappa \rho)}{H_n^{(1)}(\kappa \rho_m)} + C_{2(m)} \frac{H_n^{(2)}(\kappa \rho)}{H_n^{(2)}(\kappa \rho_m)}, \quad \rho_{m-1} < \rho < \rho_m, \quad (11)$$

где для устранения несущественных фаз в матрице перехода через дельта-функцию введены дополнительные множители по сравнению с представлением (3). Распространение волн через такую структуру можно записать на языке матриц трансляции \mathbf{T}_m и перехода через дельта-функцию \mathbf{M}_m , которые вполне аналогичны плоскому случаю [8].

Матрица \mathbf{T}_m , осуществляющая трансляцию $m \rightarrow m - 1$, может быть представлена как:

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \frac{H_n^{(1)}(\kappa\rho_{m-1})}{H_n^{(1)}(\kappa\rho_m)} & 0 \\ 0 & \frac{H_n^{(2)}(\kappa\rho_{m-1})}{H_n^{(2)}(\kappa\rho_m)} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а матрица \mathbf{M}_m перехода через дельта-функцию, расположенную при $\rho = \rho_m$, в соответствии с (6)–(7) будет:

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} 1 - ia_m & -ia_m \\ ia_m & 1 + ia_m \end{pmatrix}, \quad a_m = i \frac{\alpha_m k^2}{\kappa} \frac{1}{M_{0m}}, \quad (13)$$

где величина M_{0m} определена формулой (8), в которой ρ_0 надо заменить на ρ_m , т.е. имеем:

$$M_{0m} = -\frac{H_{n+1}^{(1)}(\kappa\rho_m)}{H_n^{(1)}(\kappa\rho_m)} + \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa\rho_m)}{H_n^{(2)}(\kappa\rho_m)}. \quad (14)$$

Полная матрица перехода от точки $\rho_{m+1} - 0$ к точке $\rho_m - 0$ есть $\mathbf{M}_m \mathbf{T}_{m+1}$, которая действует как

$$\begin{pmatrix} C_{1(m)} \\ C_{2(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_m \mathbf{T}_{m+1} \begin{pmatrix} C_{1(m+1)} \\ C_{2(m+1)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Полная матрица перехода через многослойную структуру \mathbf{Q}^+ теперь может быть записана в следующей форме

$$\mathbf{Q}^+ = \prod_{m=0}^{N-1} \mathbf{M}_m \mathbf{T}_{m+1}, \quad (16)$$

а соответствующий коэффициент отражения представляется как

$$R^+ = \frac{C_{2(0)}}{C_{1(0)}} = \frac{(\mathbf{Q}^+)_{12}}{(\mathbf{Q}^+)_{11}}. \quad (17)$$

Для коэффициента отражения R_+ можно записать рекуррентные соотношения аналогично плоскому случаю. Они получаются из общего уравнения (15) с учетом определения промежуточных коэффициентов отражения:

$$R_m = \frac{C_{2(m)}}{C_{1(m)}}. \quad (18)$$

После длинных, но несложных преобразований можно получить:

$$R_m = \frac{R_{0m} + Q_{0m}S_m R_{m+1}}{1 - R_{0m}S_m R_{m+1}}, \quad (19)$$

где

$$R_{0m} = \frac{ia_m}{1 - ia_m}, \quad Q_{0m} = \frac{1 + ia_m}{1 - ia_m}, \quad S_m = \frac{H_n^{(2)}(\kappa\rho_m)}{H_n^{(1)}(\kappa\rho_m)} \frac{H_n^{(1)}(\kappa\rho_{m+1})}{H_n^{(2)}(\kappa\rho_{m+1})}. \quad (20)$$

Формула (19) выражает коэффициент отражения от многослойной структуры, содержащей $N - m$ периодов, через коэффициент отражения от структуры с $N - m - 1$ периодами. Граничные условия будут $R_{N+1} = 0$ и $R_+ = R_0$.

Моды слабоконтрастного цилиндрического брэгговского световода. Рассмотрим брэгговский цилиндрический волновод со следующим распределением диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \varepsilon_0, & \rho < \frac{d}{2}, \\ \varepsilon_1 + \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \delta(\rho - \rho_m), & \rho \geq \frac{d}{2}, \\ \varepsilon_1, & \rho > \rho_{N-1}, \end{cases} \quad \rho_0 = \frac{d}{2} + b. \quad (21)$$

Он состоит из сердцевины диаметром d и диэлектрической проницаемостью ε_0 , переходного слоя толщиной b и многослойного покрытия, состоящего из N дельта-функций. Параметр b – расстояние от границы сердцевины до первой дельта-функции, это т.н. фазовый параметр. В таком волокне существуют слабо вытекающие брэгговские моды. В сердцевине волновода решение скалярного волнового уравнения (1) можно записать как

$$E(\rho) = E_0 J_n(\eta\rho), \quad \rho < \frac{d}{2}, \quad \eta = k\sqrt{\varepsilon_0 - p^2}, \quad E_0 = 1. \quad (22)$$

В промежутке между сердцевиной и первой дельта-функцией решение записывается как

$$E(\rho) = A \frac{H_n^{(1)}(\kappa\rho)}{H_n^{(1)}(\kappa(d/2 + b))} + B \frac{H_n^{(2)}(\kappa\rho)}{H_n^{(2)}(\kappa(d/2 + b))}, \quad d/2 < \rho < d/2 + b. \quad (23)$$

Несложно заметить, что

$$\frac{B}{A} = R_+, \quad (24)$$

где R_+ – коэффициент отражения от многослойной структуры, определяемый формулой (17). Дисперсионное уравнение следует из условия равенства логарифмических производных при $\rho = d/2$. Опуская несложные, но длинные преобразования, можно написать:

$$\eta \frac{J_{n+1}(\eta d/2)}{J_n(\eta d/2)} = \frac{\kappa}{1 + R_+ S_0} \left[\frac{H_{n+1}^{(1)}(\kappa d/2)}{H_n^{(1)}(\kappa d/2)} + R_+ S_0 \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa d/2)}{H_n^{(2)}(\kappa d/2)} \right], \quad (25)$$

где

$$S_0 = \frac{H_n^{(2)}(\kappa d/2)}{H_n^{(1)}(\kappa d/2)} \frac{H_n^{(1)}(\kappa(d/2 + b))}{H_n^{(2)}(\kappa(d/2 + b))}. \quad (26)$$

Уравнение (25) должно решаться относительно параметра η , из которого затем находится постоянная распространения p . Величина p будет в общем случае комплексной – даже при отсутствии поглощения; мнимая часть соответствует вытеканию моды из волновода.

В общем случае уравнение (25) может быть решено только численно и дает при каждом n набор мод, которые, как и в плоском случае, нумеруются, начиная с 1 [8]. Каждая мода при этом обозначается как (m, n) . Можно показать, что m соответствует числу нулей поля моды в сердцевине волокна, не считая нулей на оси и границе. Можно также показать, что в хорошем световоде (при $a_m \gg 1$) и при $b = 0$ величина поля моды на границе сердцевины близка к нулю. Последнее означает, что моды приблизительно определяются условием

$$J_n(\eta d/2) = 0, \quad (27)$$

которое вполне аналогично уравнению $\cos(\eta d/2) = 0$ в плоском случае [8].

Примеры расчета цилиндрических брэгговских волноводов. В качестве примера рассмотрим световод с параметрами, близкими к реальному волокну (см. [5], рис. 8а) $\epsilon_1 - \epsilon_0 = 2n\Delta n = 3 \cdot 10^{-3}$, $l = 7$ мкм, $d = 40$ мкм, $\alpha_m = 1.5 \cdot 10^{-2}$ мкм и $n_0 = \sqrt{\epsilon_0} = 1.45$. Расположение дельта-функций периодическое и $\rho_m = d/2 + b + ml$. Для решения дисперсионного уравнения (25) возьмем в качестве начальных значения η , определяемые

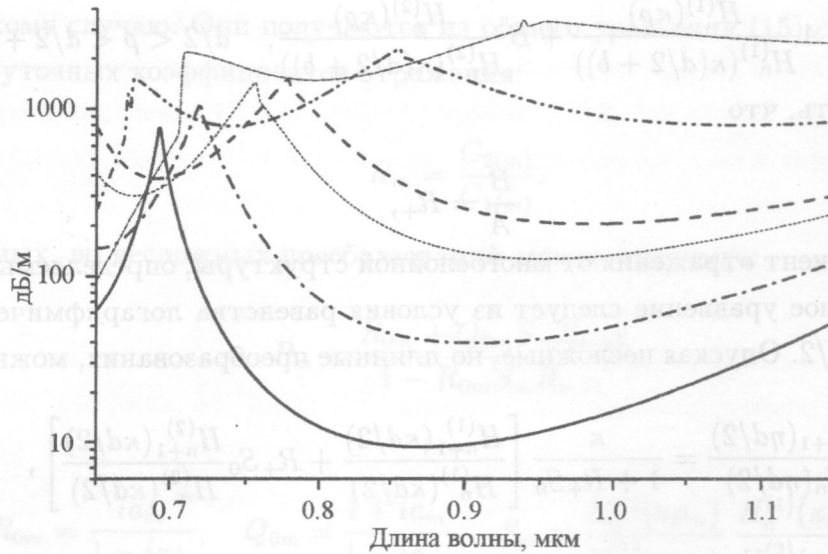


Рис. 1. Коэффициенты затухания для мод цилиндрического брэгговского волновода: (1,0) (толстая сплошная линия) и (2,0) (толстая пунктирная линия), (1,1) (толстая штрих-пунктирная линия) и (2,1) (толстая два штрих-пунктирная линия), (1,2) (тонкая короткая пунктирная линия) и (2,2) (тонкая короткая штрих-пунктирная линия).

формулой (27), и решим уравнение (25) численно итерационным методом. Коэффициенты (декременты) затухания брэгговских волноводных мод

$$dB = k \operatorname{Im} \rho = \operatorname{Im} \sqrt{k^2 \epsilon_0 - \eta^2} \quad (28)$$

при $n = 0, 1, 2$ и $m = 1, 2$ представлены на рис. 1. Рис. 2 изображает поля этих мод. Для расчета полей мод использовались матрицы перехода (15) и следующие граничные условия при $\rho = d/2$:

$$A = -J_n(\eta d/2) \frac{H_n^{(1)}(\kappa(d/2 + b))}{H_n^{(1)}(\kappa d/2)} \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa d/2)}{H_n^{(2)}(\kappa d/2)} - \frac{\eta J_{n+1}(\eta d/2)}{\kappa J_n(\eta d/2)}, \quad (29)$$

$$B = J_n(\eta d/2) \frac{H_n^{(2)}(\kappa(d/2 + b))}{H_n^{(2)}(\kappa d/2)} \frac{H_{n+1}^{(1)}(\kappa d/2)}{H_n^{(1)}(\kappa d/2)} - \frac{\eta J_{n+1}(\eta d/2)}{\kappa J_n(\eta d/2)} \frac{H_{n+1}^{(2)}(\kappa d/2)}{H_n^{(2)}(\kappa d/2)} \quad (30)$$

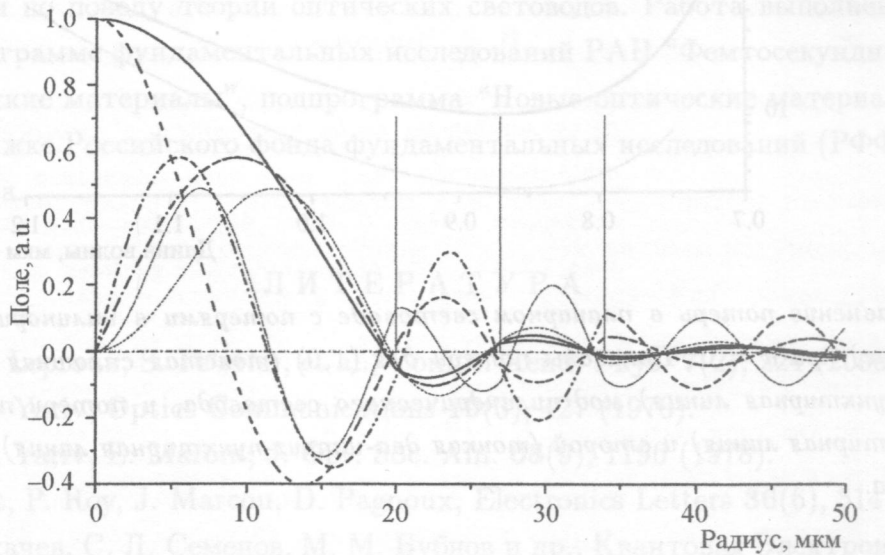


Рис. 2. Поля для мод цилиндрического брэгговского волновода: (1,0) (толстая сплошная линия) и (2,0) (толстая пунктирная линия), (1,1) (толстая штрих-пунктирная линия) и (2,1) (толстая два-штрих-пунктирная линия), (1,2) (тонкая короткая пунктирная линия) и (2,2) (тонкая короткая штрих-пунктирная линия). Вертикальные линии отмечают расположение дельта-функций. Длина волны $\lambda = 0.9$ мкм соответствует минимуму потерь на рис. 1.

Как видно из рис. 1, минимальное затухание для основной моды ≈ 10 dB/m. По порядку величины потери превосходят измеренные в работе [5] (рис. 8б) величины. Расположение мод в порядке увеличения потерь следующее: (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1) и (2,2). Иными словами, потери мод определяются числом нулей поля в сердцевине волокна (не считая нулей на оси и границе). Разница – например, осцилляции потерь в эксперименте – обусловлена в том числе и влиянием полимерной оболочки, которая здесь не учитывалась. Еще одна причина может быть в наличии дополнительного барьера в профиле показателя преломления реального волокна, который расположен немного снаружи от последней дельта-функции.

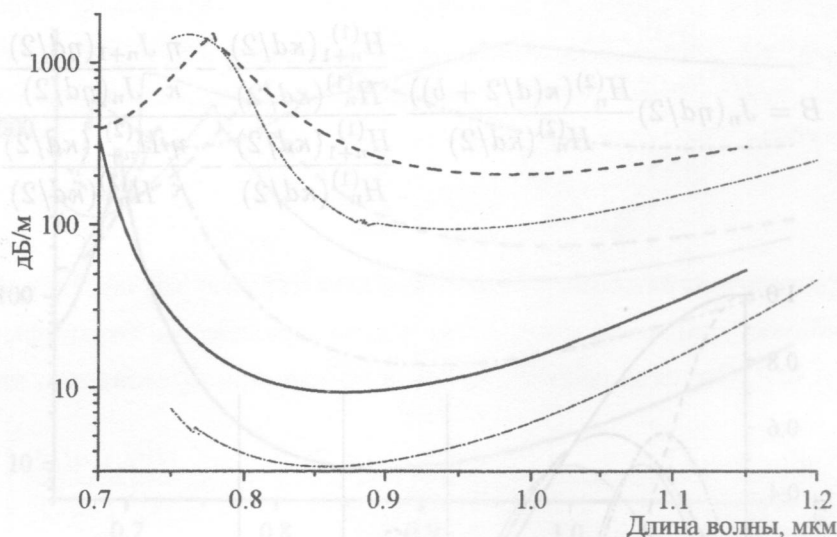


Рис. 3. Сравнение потерь в планарном световоде с потерями в цилиндрическом световоде (волокне) при $n = 0$. Показаны потери для (1,0) (толстая сплошная линия) и (2,0) (толстая пунктирная линия) мод цилиндрического световода, и потери первой (тонкая штрих-пунктирная линия) и второй (тонкая два-штрих-пунктирная линия) мод планарного световода.

Рис. 3 содержит сравнение потерь в цилиндрическом и планарном брэгговских световодах с одинаковыми параметрами (см. выше). Потери в планарном световоде меньше, хотя качественно потери ведут себя одинаково. Разница очевидно связана с тем обстоятельством, что для цилиндрического случая выбранное периодическое расположение дельта-функций не является оптимальным. Оптимальным же будет некое неперiodическое.

Заключение. В работе была представлена точная аналитическая теория цилиндрических слабоконтрастных брэгговских световодов – брэгговских волокон, стенки которых состоят из дельта-функций, и рассмотрена схема классификации брэгговских мод. Были рассчитаны декременты затухания и поля мод для примера, близкого к реальному волокну, взятому из литературы. Параметры, использованные для расчета примеров, были оптимизированы для диапазона длин волн $0.9 < \lambda < 1.0$ мкм, а диаметр сердцевины был 40 мкм. Сравнение свойств брэгговских волокон с планарными брэгговскими световодами выявило качественное сходство поведения декрементов затухания. Это позволяет использовать планарную модель для качественного анализа свойств и оптимизации брэгговских волокон.

Представленная теория может использоваться для оценки параметров реальных брэгговских волокон. Теория легко обобщается на случай световодов с более сложной структурой, например, если имеется полимерная оболочка и дополнительные барьеры. Дальнейшее развитие созданной модели возможно в направлении учета изгибных потерь, а также в направлении учета эффектов поляризации излучения.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Успенскому, А. В. Попову за содержательные дискуссии по поводу теории оптических световодов. Работа выполнена при поддержке по программе фундаментальных исследований РАН "Фемтосекундная оптика и новые оптические материалы", подпрограмма "Новые оптические материалы", а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект N 07-02-01244-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Roy, P. Leproux, S. Fe'vrier, et al., *Compt. Rend. Phys.* **7**(2), 224 (2006).
- [2] P. Yeh, A. Yariv, *Optics Communications* **19**(3), 427 (1976).
- [3] P. Yeh, A. Yariv, E. Marom, *J. Opt. Soc. Am.* **68**(9), 1196 (1978).
- [4] F. Brechet, P. Roy, J. Marcou, D. Pagnoux, *Electronics Letters* **36**(6), 514 (2000).
- [5] М. Е. Лихачев, С. Л. Семенов, М. М. Бубнов и др., *Квантовая Электроника* **36**, 581 (2006).
- [6] Е. И. Голант, К. М. Голант, *ЖТФ* **76**(8), 101 (2006).
- [7] Д. В. Прокопович, А. В. Попов, А. В. Виноградов, *Квантовая Электроника* **37**(9), 873 (2007).
- [8] Р. М. Фещенко, А. В. Виноградов, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, N 6, 7 (2007).

Поступила в редакцию 18 марта 2008 г.