УДК 537.6

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВЕЩЕСТВА

М. А. Микаэлян

Применительно к статике для среды с произвольным нелинейным материальным уравнением $\mathbf{B} = f(\mathbf{H}, \mathrm{x})$ *показано, что собственные значения тензора магнитной проницаемости* $\mu_{ik} \equiv \partial B_i/\partial H_k$ *неотрицательны. Одновременно отмечено, что рассмотрение среды в постоянном внешнем магнитном поле* $\mathbf{B}^{ex}$ *всегда неявно предполагает присутствие сторонних сил, поддерживающих ток внешних зарядов (источник* $\mathbf{B}^{ex}$*) неизменным, и если при создании намагниченности* $\vec{\mathcal{M}}$ *учитывать работу указанных сил, то это ведет к появлению в энергии системы дополнительного слагаемого* $+\vec{\mathcal{M}}\mathbf{B}^{ex}$*, наличие которого ослабляет утверждение теоремы Бора–Ван Левен, оставляя разрешенным в классической физике диамагнетизм.*

Вывод термодинамических неравенств основан на использовании второго начала термодинамики, которое определяет направленность самопроизвольных процессов, протекающих при тех или иных внешних условиях [1]. Если фиксированы внешнее давление p_0 и температура T_0 окружающей среды (играющей роль термостата), то самопроизвольная эволюция сопровождается уменьшением величины $U - T_0S + p_0v$ (U – внутренняя энергия, S – энтропия, v – объем), минимальность которой, следовательно, есть (при указанных внешних условиях) критерий термодинамического равновесия. На подмножестве конкурирующих состояний, для которых $T = T_0$, эта величина принимает вид

$$F + p_0v, \tag{1}$$

где $F \equiv U - TS$ – свободная энергия среды[1], и условия ее минимальности (равенство нулю первого дифференциала и неотрицательность второго) дают:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p_0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \geq 0. \tag{2}$$

В состоянии равновесия внутреннее давление совпадает с внешним ($p = p_0$), и подстановка первого из соотношений (2) во второе приводит к известному термодинамическому неравенству

$$\partial p/\partial v \leq 0 \tag{3}$$

(относящемуся к фиксированной температуре), которому обязано удовлетворять реальное уравнение состояния, связывающее давление p и объем v.

В термодинамике диэлектриков и магнетиков аналогом (3) являются неравенства для собственных значений тензоров статических ($\omega = 0$) диэлектрической и магнитной проницаемостей вещества

$$\varepsilon_{ik} \equiv \partial D_i/\partial E_k, \quad \mu_{ik} \equiv \partial B_i/\partial H_k, \tag{4}$$

где индукции и поля связаны статическими материальными уравнениями (МУ)

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \varphi(\mathbf{H}) \tag{5}$$

(для неоднородных сред f и φ дополнительно зависят от $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$).

Значительный вклад в решение вопроса о допустимых значениях диэлектрической и магнитной проницаемостей был внесен Киржницем [2], подробно рассмотревшим различные способы электромагнитного воздействия на среду; в частности, было показано, что при наличии пространственной дисперсии продольная (относительно $\mathbf{k}$) диэлектрическая проницаемость может быть отрицательной. В указанных работах речь шла о линейных (однородных, изотропных) средах с пространственной дисперсией; мы же интересуемся противоположным случаем произвольных нелинейных (неоднородных, анизотропных) сред, но без пространственной дисперсии. Последнее с феноменологической точки зрения означает, что в МУ (5) f и φ – (произвольные) функции, но не функционалы. Этот "обычный" случай привлекателен тем, что поддается более полному

[1] Величина (1) также имеет смысл свободной энергии, но не самой среды, а системы "среда под внешним давлением p_0" – ее изменение в квазистатическом изотермическом процессе равно работе, производимой над средой в присутствии фиксированного внешнего давления p_0 (работу производят силы давления, дополнительного к p_0).

исследованию и в нем отчетливее проявляются отличительные черты термодинамики диэлектриков и магнетиков, отмеченные в работах [3].

Термодинамические неравенства для собственных значений тензора диэлектрической проницаемости ε_{ik} были выведены в работах [3] как условия термодинамического равновесия системы "диэлектрический эллипсоид в однородном внешнем поле $\mathbf{E}^{ex}$" ($\mathbf{E}^{ex}$ – поле внешних зарядов в пустоте). Необходимо напомнить основные этапы этого вывода, поскольку подход и понятия, используемые в нем, служат основой для перехода к более сложному магнитному аналогу задачи, которому посвящена данная статья.

Указанная система во многом аналогична системе "среда под внешним давлением p_0"; имеющиеся же отличия обусловлены дальнодействующим характером электромагнитных сил. Аналогом объема v здесь выступает вектор поляризации $\mathbf{P}$, идентифицирующий состояние поляризованной среды (выбор в качестве такового поля $\mathbf{E}$ или индукции $\mathbf{D}$ в общем случае недопустим [3]). На множестве однородно поляризованных состояний эллипсоида (с температурой $T = T_0$) термодинамическому равновесию отвечает минимальность величины

$$V(\mathbf{P}) - \mathbf{E}^{ex}\mathbf{P} \tag{6}$$

(ср. (1)), где $V(\mathbf{P})$ – свободная энергия эллипсоида[2], то есть работа, которую (в отсутствие $\mathbf{E}^{ex}$) необходимо произвести над зарядами среды, чтобы квазистатически и изотермически создать данное $\mathbf{P}$. Поскольку работа силы не зависит от ее физической природы, удобно представлять, что она производится сторонними силами ("руками"). Та же работа, но производимая в присутствии $\mathbf{E}^{ex}$, дается выражением (6), которое, следовательно, имеет смысл свободной энергии рассматриваемой системы (ср. (1)).

Подчеркнем, что речь идет о работе, производимой над зарядами самой среды, взаимные смещения которых и определяют $\mathbf{P}$. Известная же величина $\mathcal{F} = (1/4\pi)\int \mathbf{E}d\mathbf{D}$ возникает в качестве работы, производимой над внешними зарядами в присутствии среды, и имеет смысл свободной энергии расширенной системы "среда + внешние заряды" [3]; такая величина не обладает свойством минимальности в состоянии равновесия [2, 3].

Важно отметить место уравнений Максвелла при отыскании условий равновесия. При решении этого вопроса термодинамика рассматривает лишь такие конкурирующие состояния, которые могут быть "приготовлены" квазистатически; соответственно,

---
[2]Ниже свободную энергию мы относим к единице объема.

на множестве произвольных (как равновесных, так и неравновесных) состояний выполняются статические уравнения Максвелла, сводящиеся к закону Кулона, который определяет поле $\mathbf{E}$ по плотности полного заряда. Последний слагается из внешнего – источника $\mathbf{E}^{ex}$ и индуцированного – источника собственного (деполяризующего) поля среды $\mathbf{E}^{dep}$. Объемная плотность индуцированного заряда равна $-\mathrm{div}\mathbf{P}$ и в случае однородной поляризации эллипсоида отлична от нуля только на его границе (где имеет δ-функционный вид и отвечает поверхностной плотности $\mathbf{Pn}$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль); создаваемое им поле однородно внутри эллипсоида и равно [4]:

$$E_i^{dep} = -4\pi n_{ik} P_k, \tag{7}$$

где n_{ik} – тензор деполяризующих факторов, собственные значения которого $n^{(i)}$ выражаются через отношения длин осей эллипсоида,

$$0 \le n^{(i)} \le 1, \quad n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \tag{8}$$

$\mathbf{E}^{ex}$ в сумме с $\mathbf{E}^{dep}$ (7) дает полное поле $\mathbf{E}$ в среде, так что для $\mathbf{E}^{ex}$ можно написать

$$E_i^{ex} = E_i + 4\pi n_{ik} P_k, \tag{9}$$

откуда, ввиду фиксированности $\mathbf{E}^{ex}$, вытекает инвариантность написанной линейной комбинации $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ на множестве конкурирующих однородно поляризованных состояний эллипсоида.

Отличительной чертой термодинамики диэлектриков и магнетиков является наличие дальнодействующих (электромагнитных) сил. В случае однородной поляризации это проявляется в зависимости свободной энергии образца $V(\mathbf{P})$ от его геометрической формы, и для эллипсоида

$$V(\mathbf{P}) = V_0(\mathbf{P}) + 2\pi n_{ik} P_i P_k, \tag{10}$$

где $V_0(\mathbf{P})$ – свободная энергия однородно поляризованной бесконечной среды (см. сноску 2). Второе слагаемое отражает конечность рассматриваемого образца – на его границе "выступает" индуцированный заряд, порождающий поле $\mathbf{E}^{dep}$ (7), и при вычислении $V(\mathbf{P})$ (как работы над зарядами среды) работа против этого поля $-\int \mathbf{E}^{dep} d\mathbf{P}$ дает указанное слагаемое.

Условия минимальности величины (6) имеют вид:

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = E_i^{ex}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial P_i \partial P_k} dP_i dP_k \ge 0 \tag{11}$$

(ср. (2)). Подставив сюда E_i^{ex} (9) и V (10), получим:

$$\frac{\partial V_0}{\partial P_i} = E_i, \quad \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial P_i \partial P_k} + 4\pi n_{ik}\right) dP_i dP_k \geq 0. \tag{12}$$

Первое из этих соотношений есть МУ среды в форме связи $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ (с учетом $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ оно может быть представлено в форме (5))[3]. Поскольку МУ определяется через величину $V_0(\mathbf{P})$, то последняя может (вместо МУ) рассматриваться как первичная в феноменологическом описании среды и, например, задаваться своим степенным разложением в духе теории Ландау – такой подход лежит в основе построения феноменологической теории сегнетоэлектричества ($V_0 = -\alpha P^2 + \beta P^4$) [5].

В общем случае неоднородной поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ отсутствие пространственной дисперсии означает: $|\nabla P/P|^{-1} >> a_0$, где a_0 – характерный размер пространственной дисперсии, совпадающий для диэлектриков с межатомным расстоянием. Если в среде мысленно выделить физически бесконечно малый эллипсоид, то выполнимость указанного условия позволяет считать его поляризованным однородно; внешним по отношению к нему является то поле, которое в случае изъятия его из среды возникло бы в образовавшейся полости – оно в сумме с $\mathbf{E}^{dep}$ (7) дает поле $\mathbf{E}$ в среде, так что определяется (9). С учетом сказанного, в общем случае образца произвольной формы, находящегося в произвольном внешнем поле $\mathbf{E}^{ex}(\mathbf{x})$, можно считать, что формулы (12) относятся к каждой точке среды (если последняя неоднородна, то V_0 дополнительно зависит от $\mathbf{x}$ как от параметра) и справедливы для любого тензора n_{ik}, отвечающего произвольному мысленному выбору в среде бесконечно малого эллипсоида. Пусть последний выбран так, что его главные оси совпадают с главными осями тензора обратной диэлектрической восприимчивости $\partial E_i/\partial P_k$; тогда второе из соотношений (12) после подстановки в него первого приводит к трем неравенствам

$$\partial E_i/\partial P_i \geq -4\pi n^{(i)}$$

(по i нет суммирования!). С учетом (8) наиболее жестким из них отвечает поочередный выбор эллипсоидов-"иголок" ($n^{(i)} = 0$), так что в итоге имеем: $\partial E_i/\partial P_i \geq 0$. Подставляя

---

[3] Будучи условием равновесия, МУ не является прямым аналогом уравнения состояния, связывающего давление p и объем v и справедливого как для равновесных, так и для неравновесных состояний; аналогия же, как это видно из изложения, имеется с первым из соотношений (2), связывающим равновесное значение объема v с внешним давлением p_0 [3].

$P_i = (D_i - E_i)/4\pi$, для собственных значений тензора диэлектрической проницаемости ε_{ik} (4), получаем: $\varepsilon^{(i)} \geq 1$.

Перейдем к рассмотрению магнитного воздействия на среду, имея в виду систему "эллипсоид в однородном внешнем поле $\mathbf{B}^{ex}$". Удобно представлять, что току внешних зарядов (источнику $\mathbf{B}^{ex}$) отвечает следующий идеализированный соленоид: бесконечный равномерно заряженный цилиндр, вращающийся вокруг своей оси с некоторой угловой скоростью. Внутри соленоида располагается эллипсоид, состояние которого идентифицируется вектором намагниченности $\mathbf{M}$. На множестве однородно намагниченных состояний эллипсоида (с температурой $T = T_0$) термодинамическому равновесию, как и в предыдущих случаях, отвечает минимальность свободной энергии системы, равной работе, которую необходимо произвести над ее объектами, чтобы квазистатически и изотермически создать данное $\mathbf{M}$ при фиксированных значениях внешних параметров – в данном случае $\mathbf{B}^{ex}$.

Последнее существенно! – для поддержания $\mathbf{B}^{ex}$ неизменным также требуется совершение работы. Действительно, при создании $\mathbf{M}$ меняется собственное (размагничивающее) поле среды $\mathbf{B}^{dem}$,

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}^{dem} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{in}, \quad \mathbf{j}^{in} = c\,\mathrm{rot}\mathbf{M}, \tag{13а}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}^{dem} = 0, \tag{13б}$$

что ведет к появлению вихревого электрического поля $\mathbf{E}$,

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}^{dem}}{\partial t}, \tag{14}$$

воздействующего на ток внешних зарядов (на ток соленоида). Поддержание последнего неизменным сопровождается совершением над ним работы (производимой в случае реального соленоида батареей) $A = -\int dt \int \mathbf{j}^{ex}\mathbf{E}d\mathbf{x}$, где $d\mathbf{x} = dxdydz$; подставив $\mathbf{j}^{ex} = (c/4\pi)\mathrm{rot}\mathbf{B}^{ex}$ и проинтегрировав по частям, а затем воспользовавшись (14), будем иметь:

$$A = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}^{ex}\mathbf{B}^{dem}\,d\mathbf{x}. \tag{15}$$

Согласно (13а) $\mathrm{rot}(\mathbf{B}^{dem} - 4\pi\mathbf{M}) = 0$, так что $\mathbf{B}^{dem}$ отличается от $4\pi\mathbf{M}$ на слагаемое типа градиента скаляра, которое не дает вклада в интеграл (15) ввиду $\mathrm{div}\mathbf{B}^{ex} = 0$; заменив в (15) $\mathbf{B}^{dem}$ на $4\pi\mathbf{M}$, имеем: $A = \int \mathbf{B}^{ex}\mathbf{M}d\mathbf{x}$, и для случая однородного (в области, занимаемой средой) поля $\mathbf{B}^{ex}$ получаем:

$$A = \mathbf{B}^{ex}\vec{\mathcal{M}}, \quad \vec{\mathcal{M}} \equiv \int \mathbf{M}d\mathbf{x}. \tag{16}$$

Другое принципиальное отличие от электрического аналога задачи обусловлено тем, что магнитная сила всегда ортогональна скорости, а значит работа, производимая над зарядами среды при их "раскрутке" в процессе создания $\mathbf{M}$ (как и в электрическом случае, удобно представлять, что она производится сторонними силами), не зависит от значения присутствующего при этом постоянного $\mathbf{B}^{ex}$. Эту работу, отвечающую однородно намагниченному эллипсоиду и отнесенную к единице его объема, обозначим через $V(\mathbf{M})$; в сумме с удельным значением величины (16) она дает полную работу, производимую над системой, то есть свободную энергию последней:

$$V(\mathbf{M}) + \mathbf{B}^{ex}\mathbf{M} \tag{17}$$

(ср. (6)).

Здесь мы прервемся и сделаем замечание относительно теоремы Бора–Ван Левен, утверждающей, что при классическом рассмотрении намагниченность совокупности заряженных частиц, находящихся в постоянном поле $\mathbf{B}^{ex}$, в состоянии термодинамического равновесия отсутствует. Ее доказательство опирается на распределение Гиббса, в котором фигурирует гамильтонова функция частиц, то есть их энергия (выраженная через обобщенные импульсы); последняя (при классическом рассмотрении) есть работа, которую необходимо произвести над частицами, чтобы придать их координатам и импульсам заданные значения. Указанная же работа (подобно $V(\mathbf{M})$) от факта присутствия $\mathbf{B}^{ex}$ не зависит, что в конечном итоге и ведет к обращению в нуль среднего значения намагниченности.

Замечание состоит в следующем: поскольку в распределении Гиббса (как это вытекает из его вывода) фигурирует полное значение энергии системы, то, казалось бы, и учет работы, посредством которой энергия определяется, тоже должен быть полным, а это значит, что к гамильтоновой функции частиц должно быть добавлено слагаемое (16).

К этому же можно прийти и не апеллируя к понятию работы. С микроскопической точки зрения тензор энергии-импульса совокупности заряженных частиц содержит две составляющие, формально соответствующие раздельному рассмотрению частиц (без поля) и полного электромагнитного поля [6]. Второй составляющей отвечает наличие в энергии системы слагаемого $\int(\mathbf{B}^2/8\pi)d\mathbf{x}$; подставив $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{ex} + \mathbf{B}^{micro}$, где $\mathbf{B}^{micro}$ – собственное поле частиц (его пространственное усреднение дало бы $\mathbf{B}^{dem}$), и отбросив слагаемое $\int(\mathbf{B}^{ex^2}/8\pi)d\mathbf{x}$ как аддитивную константу, получим, что в выражении для энергии системы дополнительной в присутствии $\mathbf{B}^{ex}$ является величина $(1/4\pi)\int \mathbf{B}^{ex}\mathbf{B}^{micro}d\mathbf{x}$, которая (аналогично (15)) легко приводится к виду (16).

Если допустить, что высказанное замечание справедливо, и в распределении Гиббса помимо гамильтониана частиц присутствует слагаемое (16), то доказательство обсуждаемой теоремы теряет силу и, соответственно, возникает вопрос о допустимых значениях классической магнитной проницаемости. Прерванное рассмотрение как раз и носило классический характер – магнетизм, обусловленный наличием у частиц спина, не имеет под собой классической аналогии типа "раскрутки" зарядов; продолжим начатое рассмотрение и покажем, что в рамках классического подхода возможен только диамагнетизм.

Размагничивающее поле, определяемое (13а, б), для однородно намагниченного эллипсоида однородно внутри него и равно [4]

$$B_i^{dem} = 4\pi(\delta_{ik} - n_{ik})M_k \qquad (18)$$

(ср. (7)). $\mathbf{B}^{ex}$ в сумме с $\mathbf{B}^{dem}$ (18) дает полное поле $\mathbf{B}$ в среде (называемое индукцией), так что для $\mathbf{B}^{ex}$ можно написать:

$$B_i^{ex} = B_i - 4\pi(\delta_{ik} - n_{ik})M_k \qquad (19)$$

(ср. (9)). Разложение $V(\mathbf{M})$, аналогичное (10), имеет вид

$$V(\mathbf{M}) = V_0(\mathbf{M}) + 2\pi(\delta_{ik} - n_{ik})M_iM_k, \qquad (20)$$

где второе слагаемое отражает конечность образца – на его границе локализуется индуцированный ток (с поверхностной плотностью $[\mathbf{Mn}]$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль), порождающий $\mathbf{B}^{dem}$ (18); изменение последнего ведет, согласно (14), к появлению поля $\mathbf{E}$, работа против которого при "раскрутке" зарядов равна $-\int dt \int \mathbf{j}^{micro}\mathbf{E}d\mathbf{x}$. Мысленное разбиение области интегрирования на физически бесконечно малые объемы эквивалентно замене

$$\mathbf{j}^{micro} \to \langle \mathbf{j}^{micro} \rangle \equiv \mathbf{j}^{in} = c\,\mathrm{rot}\mathbf{M},$$

и после интегрирования по частям с последующим использованием (14) получаем, что вычисляемая работа, отнесенная к единице объема, равна $\int \mathbf{M}d\mathbf{B}^{dem}$; подстановка сюда $\mathbf{B}^{dem}$ (18) дает указанное слагаемое.

Условия минимальности (17) имеют вид:

$$\frac{\partial V}{\partial M_i} = -B_i^{ex}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial M_i \partial M_k} dM_i dM_k \geq 0$$

(ср. (11)). Подставив сюда B_i^{ex} (19) и V (20), будем иметь:

$$\frac{\partial V_0}{\partial M_i} = -B_i, \quad \left[\frac{\partial^2 V_0}{\partial M_i \partial M_k} + 4\pi(\delta_{ik} - n_{ik})\right] dM_i dM_k \geq 0 \tag{21}$$

(ср. (12)). Первое из этих соотношений есть МУ среды в форме связи $\mathbf{B}$ и $\mathbf{M}$ (с учетом $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ оно может быть представлено в форме (5)). Далее, как и в электрическом случае, рассматриваем эллипсоид как бесконечно малый, мысленно выделенный в среде. Пусть он выбран так, что его главные оси совпадают с главными осями тензора $\partial B_i/\partial M_k$; тогда второе из соотношений (21) после подстановки в него первого приводит к трем неравенствам

$$\partial B_i/\partial M_i \leq 4\pi(1 - n^{(i)})$$

(по i нет суммирования!). С учетом (8) наиболее жестким из них отвечает поочередный выбор эллипсоидов-"дисков" ($n^{(i)} = 1$), так что в итоге имеем: $\partial B_i/\partial M_i \leq 0$. Подставляя $M_i = (B_i - H_i)/4\pi$, для собственных значений тензора магнитной проницаемости μ_{ik} (4) получаем: $0 \leq \mu^{(i)} \leq 1$.

"Потеря" парамагнетизма обусловлена неучетом квантовой природы зарядов среды. Чтобы обойти этот вопрос и получить правильные неравенства для μ_{ik}, рассмотрим круговой процесс, в котором мы оказываем воздействие только на внешние заряды – объекты классические; потребовав далее неотрицательность производимой нами работы (второе начало термодинамики), получим искомые неравенства.

Процесс имеет три стадии: 1) квазистатическое изменение $\mathbf{j}^{ex}$; 2) мгновенный возврат значения $\mathbf{j}^{ex}$ к исходному; 3) поддержание $\mathbf{j}^{ex}$ неизменным до тех пор, пока не закончатся релаксационные процессы. Зададим $\mathbf{j}^{ex}$. Пусть внешний ток течет строго по поверхности эллипсоида, и по виду он такой, как если бы был током индуцированным, порожденным однородной намагниченностью $\mathbf{m}$ эллипсоида:

$$\mathbf{j}^{ex} = c\,\mathrm{rot}\mathbf{m}; \tag{22}$$

такой выбор внешнего тока удобен тем, что создаваемое им поле $\mathbf{B}^{ex}$ внутри эллипсоида однородно – оно дается (18) с $\mathbf{M} = \mathbf{m}$:

$$B_i^{ex} = 4\pi(\delta_{ik} - n_{ik})m_k. \tag{23}$$

Производимая нами работа над внешними зарядами есть работа против поля $\mathbf{E}$: $\mathcal{A} = -\int dt \int \mathbf{j}^{ex}\mathbf{E}d\mathbf{x}$; подставив сюда (22) и проинтегрировав по частям, а затем воспользовавшись уравнением $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$, получим:

$$\mathcal{A} = v\int \mathbf{m}d\mathbf{B}. \tag{24}$$

Отсюда видно, что работа производится только на первой стадии процесса ($\mathbf{m}_1 \to \mathbf{m}_2$, $\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$) и на третьей ($\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}_1$, $\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$); на второй же стадии мгновенного изменения параметра $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m}_2 \to \mathbf{m}_1$) $\mathcal{A} = 0$ ввиду $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_2$ ($\mathbf{B}$ измениться не успевает). С учетом сказанного (24) дает:

$$\mathcal{A} = v\left[\int_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_2} \mathbf{m} d\mathbf{B} - \mathbf{m}_1(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\right].$$

В пределе $d\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \to 0$ и $d\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \to 0$ написанное выражение в первом неисчезающем приближении имеет вид $\mathcal{A} = (v/2) d\mathbf{m} d\mathbf{B}$, и неотрицательность $\mathcal{A}$ означает:

$$d\mathbf{m} d\mathbf{B} \geq 0. \tag{25}$$

Рассматривая первую (квазистатическую) стадию процесса, подставим (23) в (19) и возьмем дифференциал:

$$4\pi(\delta_{ik} - n_{ik}) dm_k = dB_i - 4\pi(\delta_{ik} - n_{ik}) dM_k. \tag{26}$$

Пусть эллипсоид выбран так, что его главные оси совпадают с главными осями тензора $\partial M_i/\partial B_k$; тогда из (26) получаем:

$$dB_i = dm_i / \left[\frac{1}{4\pi(1 - n^{(i)})} - \frac{\partial M_i}{\partial B_i}\right]$$

(по i нет суммирования!). Подстановка в (25) приводит к трем неравенствам:

$$\partial M_i/\partial B_i \leq 1/4\pi(1 - n^{(i)}).$$

С учетом (8) наиболее жестким из них отвечает поочередный выбор эллипсоидов-"иголок" ($n^{(i)} = 0$), так что в итоге имеем: $\partial M_i/\partial B_i \leq 1/4\pi$. Подставляя $M_i = (B_i - H_i)/4\pi$, для собственных значений тензора магнитной проницаемости μ_{ik} (4) получаем:

$$\mu^{(i)} \geq 0.$$

Полученные неравенства для магнитной проницаемости вещества разрешают существование как диа-, так и парамагнетизма. Они выведены в результате рассмотрения кругового процесса, в котором внешнее воздействие оказывается только на объекты классические (каковыми, в принципе, могут считаться внешние заряды).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сивухин Д. В. Термодинамика и молекулярная физика. Общий курс физики. Т. 2. М., Наука, 1975.

[2] Киржниц Д. А. УФН, **119**, 357 (1976); Долгов О. В., Киржниц Д. А., Лосяков В. В. ЖЭТФ, **83**, 1894 (1982); Киржниц Д. А. УФН, **152**, 399 (1987).

[3] Микаэлян М. А. УФН, **168**, 1331 (1998); Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 30 (1993).

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

[5] Гинзбург В. Л. ЖЭТФ, **15**, 739 (1945); ЖЭТФ, **19**, 36 (1949).

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 11 октября 2002 г.