УДК 530.12: 531.51

ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

М. А. Микаэлян

Сформулировано обобщение предложенного ранее [1] лоренц-ковариантного описания гравитационного поля на случай квантово-механического рассмотрения материи. Отмечена возможность альтернативного уравнения гравитационного поля.

Согласно общей теории относительности (ОТО) реально наблюдаемая геометрия не является фиксированной характеристикой пространства-времени. Этот факт выражает зависимость метрического тензора g_{ik} от координат x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) (что и идентифицируется как наличие гравитационного поля). В то же самое время попытки построения лоренц-ковариантной теории гравитации в рамках пространства Минковского с фиксированным метрическим тензором

$$G_{ik} = g^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1}$$

предпринимаются со времен создания специальной теории относительности.

Существенный вклад в понимание постановки задачи был внесен Тиррингом [2, 3]. Гравитационное поле, обладая универсальным свойством воздействовать на все виды материи, также воздействует и на эталоны (стержни и часы), определяющие само понятие системы отсчета. И если мы проводим построение в рамках плоского пространства, то вытекающие из такого построения реально наблюдаемые метрические соотношения оказываются соответствующими уже не плоскому, а искривленному пространству, и мы, фактически, приходим к ОТО. Сказанное в определенном смысле и увязывает рассмотрение в пространстве Минковского со стандартным рассмотрением ОТО.

В работе [1] был найден подход, обеспечивающий однозначность построения лоренц-ковариантного описания гравитационного поля. Последнее "появлялось" в процессе построения теории как тензорное поле a_{ik} в пространстве Минковского с метрическим тензором g_{ik}, см. (1). Выводимые формулы обладали тем свойством, что после формальных замен

$$a_{ik} \to g_{ik},\ \tilde{a}^{ik} \to g^{ik}, \sqrt{-a} \to \sqrt{-g} \tag{2}$$

(где $\tilde{a}^{ik}$ – тензор, обратный a_{ik}, a и g – определители матриц a_{ik} и g_{ik} соответственно) они принимали вид формул ОТО, в которых g_{ik} – метрический тензор риманова пространства.

Однако, в работе [1] рассмотрение носило классический характер. Между тем, как выяснилось, при квантово-механическом рассмотрении материи требования, предъявляемые к лагранжиану гравитационного поля $L_{(g)}$, ослабляются и не исключается правомерность альтернативного выражения для $L_{(g)}$ (приводящего к альтернативному уравнению гравитационного поля).

При общем квантово-механическом рассмотрении частице сопоставляется N- компонентная комплексная волновая функция Ψ_a ($a = 1, ..., N$; случаи $N = 1$ и $N = 4$ соответствуют частицам без спина и со спином 1/2 соответственно). Частица задается своим лагранжианом, который считается зависящим от Ψ_a, Ψ_a^* и первых производных $\partial\Psi_a/\partial x^i$, $\partial\Psi_a^*/\partial x^i$. Таким образом, действие свободной частицы в общем случае записывается в виде [4]

$$S = \frac{1}{c}\int L_0\left(\Psi_a, \Psi_a^*, \frac{\partial\Psi_a}{\partial x^i}, \frac{\partial\Psi_a^*}{\partial x^i}\right) d^4x, \tag{3}$$

где индекс "0" у лагранжиана указывает на отсутствие полей, $d^4x = cdtdxdydz$.

При чисто теоретическом рассмотрении мы заранее не знаем, какие поля существуют в природе. Однако мы знаем, что их наличие должно сводиться к появлению в выражении для действия S частицы тех или иных функций x^i. Мы можем "испортить" выражение (3) для S, заменив в нем 4-градиент по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \to \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{ie}{\hbar c}A_i, \tag{4}$$

где A^i – функции x^i. Такой подход, как известно, соответствует введению в рассмотрение электромагнитного поля; A^i – его 4-потенциал,e – заряд частицы. Если в действии S (3) провести замену (4) (понимая под $\dfrac{\partial\Psi_a^*}{\partial x^i}$ величину $\left(\dfrac{\partial\Psi_a}{\partial x^i}\right)^*$), то получим действие частицы в электромагнитном поле:

$$S = \frac{1}{c}\int Ld^4x,\ L = L_0\left(\Psi_a, \Psi_a^*, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{ie}{\eta c}A_i\right)\Psi_a, \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{ie}{\eta c}A_i\right)\Psi_a^*\right). \tag{5}$$

Каким еще образом можно "в общем виде испортить" выражение (3) для действия свободной частицы? Можно провести замену $dx^i \to \alpha_k^i dx^k$, где α_{ik} – тензор с шестнадцатью независимыми компонентами (функциями x^i). Тогда производные по контра- и ковариантным координатам заменятся по правилам

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \to \tilde{\alpha}_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \; \frac{\partial}{\partial x_i} \to \tilde{\alpha}^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{6}$$

где $\tilde{\alpha}^{ik}$ – тензор, обратный тензору α_{ik} ($\alpha_{ij}\tilde{\alpha}^{jk} = \delta_i^k$); также изменится 4-объем:

$$d^4x \to \alpha d^4x, \quad \alpha \equiv \det\|\alpha_k^i\|. \tag{7}$$

Если в выражении (3) для действия свободной частицы лагранжиан L_0 считать записанным через производные по ковариантным координатам, $L_0 = L_0\left(\Psi_a, \Psi_a^*, \frac{\partial \Psi_a}{\partial x_n}, \frac{\partial \Psi_a^*}{\partial x_n}\right)$, то после замен, даваемых (7) и второй из формул (6), действие (3) примет вид (ср. (5)):

$$S = \frac{1}{c}\int L d^4x, \; L = \alpha L_0\left(\Psi_a, \Psi_a^*, \tilde{\alpha}^{kn}\frac{\partial \Psi_a}{\partial x^k}, \tilde{\alpha}^{kn}\frac{\partial \Psi_a^*}{\partial x^k}\right). \tag{8}$$

В результате дальнейшего развития теории оказывается, что пробные частицы в присутствии поля α_{ik} движутся как в гравитационном поле (известном нам из опыта). Поэтому, начиная с этого момента, тензорное поле α_{ik} будем идентифицировать как гравитационное. Добавив к действию частицы (8) действие самого гравитационного поля, для полного действия будем иметь:

$$S = \frac{1}{c}\int \alpha L_0\left(\Psi_a, \Psi_a^*, \tilde{\alpha}^{kn}\frac{\partial \Psi_a}{\partial x^k}, \tilde{\alpha}^{kn}\frac{\partial \Psi_a^*}{\partial x^k}\right) d^4x + \frac{1}{c}\int L_{(g)}\left(\alpha_{jk}, \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x^n}\right) d^4x. \tag{9}$$

Требование $\delta S = 0$ при варьировании Ψ_a и Ψ_a^* ведет к уравнениям для Ψ_a^* и Ψ_a соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial(\partial \Psi_a/\partial x^k)} - \frac{\partial L}{\partial \Psi_a} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial L}{\partial(\partial \Psi_a^*/\partial x^k)} - \frac{\partial L}{\partial \Psi_a^*} = 0; \tag{10}$$

требование же $\delta S = 0$ при варьировании α_{ik} ведет к уравнению поля

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_{jk}}. \tag{11}$$

Умножая уравнения (10) на $\partial \Psi_a/\partial x^i$ и $\partial \Psi_a^*/\partial x^i$ соответственно, а уравнение (11) – на $\partial \alpha_{jk}/\partial x^i$, а затем складывая все три уравнения, получим закон сохранения энергии-импульса:

$$\frac{\partial (T_i^k + t_i^k)}{\partial x^k} = 0, \tag{12}$$

где тензоры энергии-импульса материи и гравитационного поля имеют вид

$$T_i^k = \frac{\partial \Psi_a}{\partial x^i} \frac{\partial L}{\partial(\partial \Psi_a/\partial x^k)} + \frac{\partial \Psi_a^*}{\partial x^i} \frac{\partial L}{\partial(\partial \Psi_a^*/\partial x^k)} - \delta_i^k L, \tag{13}$$

$$t_i^k = \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial x^i} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jn}/\partial x^k)} - \delta_i^k L_{(g)}. \tag{14}$$

С учетом структуры лагранжиана L (8) (и с использованием формул $\frac{\partial \tilde{\alpha}^{ln}}{\partial \alpha_{jk}} = -\tilde{\alpha}^{lj}\tilde{\alpha}^{kn}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{jk}} = \alpha\tilde{\alpha}^{kj}$, первая из которых получается дифференцированием соотношения $\alpha_{ij}\tilde{\alpha}^{jk} = \delta_i^k$, а вторая хорошо известна) выражение (13) для тензора энергии-импульса материи преобразуется к виду $T_i^k = -\alpha_{ji}\frac{\partial L}{\partial \alpha_{jk}}$, и после умножения уравнения поля (11) на $-\alpha_{ji}$ получаем:

$$-\alpha_{ji}\left[\frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}}\right] = T_i^k. \tag{15}$$

Это общая форма записи уравнения гравитационного поля.

На данном этапе построения нам "все известно" кроме $L_{(g)}$. Подставив в (12) вместо T_i^k левую часть уравнения поля (15) и t_i^k (14), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{-\alpha_{ji}\left[\frac{\partial}{\partial x^n} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jk}/\partial x^n)} - \frac{\partial L_{(g)}}{\partial \alpha_{jk}}\right] + \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial x^i} \frac{\partial L_{(g)}}{\partial(\partial \alpha_{jn}/\partial x^k)} - \delta_i^k L_{(g)}\right\} = 0. \tag{16}$$

Это чисто полевое соотношение (в [1] оно было получено в рамках классического рассмотрения). Чтобы не возникало противоречия с уравнением поля (15), потребуем, чтобы оно выполнялось тождественно[1], что, в свою очередь, позволяет найти явный вид лагранжиана $L_{(g)}$ (если его "как всегда" считать квадратичным по производным полевых функций, то есть имеющим вид $L_{(g)} = B^{lmn\lambda\mu\nu}\frac{\partial \alpha_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial \alpha_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}$, где $B^{lmn\lambda\mu\nu}$ – тензор, как-то выражающийся через α_{ik}); с точностью до прибавления 4-дивергенции он имеет вид [1]

$$L_{(g)} = A_{pq\sigma\tau}^{l\lambda}\alpha\tilde{\alpha}^{mp}\tilde{\alpha}^{nq}\tilde{\alpha}^{\mu\sigma}\tilde{\alpha}^{\nu\tau}\frac{\partial \alpha_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial \alpha_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} A_{pq\sigma\tau}^{l\lambda} = \mathrm{const}[g^{l\lambda}(g_{p\sigma}g_{q\tau} - g_{p\tau}g_{q\sigma}) + b_1(\delta_\sigma^l\delta_p^\lambda g_{q\tau} - \delta_\sigma^l\delta_q^\lambda g_{p\tau} - \delta_\tau^l\delta_p^\lambda g_{q\sigma} + \delta_\tau^l\delta_q^\lambda g_{p\sigma}) + \\ + b_2(\delta_p^l\delta_\sigma^\lambda g_{q\tau} - \delta_q^l\delta_\sigma^\lambda g_{p\tau} - \delta_p^l\delta_\tau^\lambda g_{q\sigma} + \delta_q^l\delta_\tau^\lambda g_{p\sigma})], \end{aligned} \tag{18}$$

[1]Тождественная выполнимость (16) означает, что уравнения движения материи содержатся в уравнении поля (известное в ОТО свойство гравитационного поля).

где $b_{1,2}$ – численные коэффициенты, а значение const определяется из рассмотрения ньютоновского предела теории.

Таким образом, "все сделано" за исключением одного – не найдены коэффициенты $b_{1,2}$. Придавая им те или иные численные значения, мы будем получать различные выражения для $L_{(g)}$ (17) и, соответственно, различные формы уравнения поля (15). Прежде чем обсуждать вопрос об однозначности определения $L_{(g)}$, рассмотрим случай частицы с нулевым спином.

В отсутствие полей лагранжиан дается известным выражением:

$$L_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} - \left(\frac{mc}{\eta}\right)^2\Psi^*\Psi\right], \tag{19}$$

где общий множитель выбран так, чтобы в пределе $\hbar \to 0$ действие S (3) принимало стандартный вид $-mc\int ds$ (см. ниже). После "включения" гравитационного поля лагранжиан дается (8), или, что то же самое, получается из (19) в результате замен (6) и умножения на α:

$$L = \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{-a}\left[\tilde{a}^{kl}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^k}\frac{\partial\Psi}{\partial x^l} - \left(\frac{mc}{\eta}\right)^2\Psi^*\Psi\right], \tag{20}$$

где введены обозначения

$$a_{ik} \equiv \alpha_{ji}\alpha^j_k,\; a \equiv \det\|a_{ik}\| = -\alpha^2,\; \tilde{a}^{ik} \equiv \tilde{\alpha}^{ij}\tilde{\alpha}^k_j \tag{21}$$

($\tilde{a}^{ik}$ – тензор, обратный a_{ik}, $a_{ij}\tilde{a}^{jk} = \delta^k_i$). Подставив (20) во второе из уравнений (10), получим уравнение Клейна–Гордона в присутствии гравитационного поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-a}\tilde{a}^{kl}\frac{\partial\Psi}{\partial x^l}\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\sqrt{-a}\Psi = 0. \tag{22}$$

Из этого уравнения вытекает сохранение 4-тока $\mathcal{J}^k$:

$$\frac{\partial\mathcal{J}^k}{\partial x^k} = 0,\; \mathcal{J} = \frac{i\hbar}{2m}\sqrt{-a}\tilde{a}^{kl}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x^l} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^l}\Psi\right), \tag{23}$$

который будем считать нормированным условием $\int\mathcal{J}^0 d^3x = 1$. Действие S (8), где L дается (20) можно выразить через $n \equiv \Psi^*\Psi$, 4-ток массы $J^k \equiv m\mathcal{J}^k$ (с учетом выбранной нормировки $\int J^0 d^3x = m$) и $\lambda \equiv (\hbar/m)\phi$ (ϕ – фаза волновой функции):

$$S = \frac{1}{c}\int\left(-\frac{a_{kl}}{\sqrt{-a}}\frac{J^kJ^l}{2mn} + \frac{\hbar^2}{8mn}\sqrt{-a}\tilde{a}^{kl}\frac{\partial n}{\partial x^k}\frac{\partial n}{\partial x^l} - \frac{mc^2}{2}\sqrt{-a}n + \lambda\frac{\partial J^k}{\partial x^k}\right)d^4x. \tag{24}$$

Требование $\delta S = 0$ при варьировании n, J^k и λ ведет к так называемым гидродинамическим уравнениям квантовой механики; в частности, при варьировании λ получается уравнение непрерывности для тока массы J^k. Формально можно считать, что в (24) последнее слагаемое отсутствует и речь идет об условном экстремуме функционала S при дополнительном условии $\partial J^k/\partial x^k = 0$ (при такой трактовке λ в (24) играет роль множителя Лагранжа). В пределе $\hbar \to 0$ исчезает и второе слагаемое в (24), так что в указанном пределе будем иметь: $S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{a_{kl}}{\sqrt{-a}}\frac{J^k J^l}{2mn} + \frac{mc^2}{2}\sqrt{-an}\right)d^4x$. Требуя $\delta S = 0$ при варьировании n, находим: $n = \sqrt{a_{kl}J^kJ^l}/mc\sqrt{-a}$, и после подстановки в подынтегральное выражение получаем действие классической непрерывно распределенной материи:

$$S = -\int\sqrt{a_{kl}J^kJ^l}d^4x; \tag{25}$$

для точечной частицы это выражение принимает вид $S = -mc\int\sqrt{a_{kl}dx^kdx^j}$, и, в частности, в отсутствие поля ($a_{kl} = g_{kl}$) $S = -mc\int ds$.

Вернемся к вопросу об однозначности определения $L_{(g)}$. В работе [1] материя рассматривалась как классическая, и для ее действия использовалось выражение (25), в котором фигурирует тензор a_{ik}; соответственно, и в уравнении движения материи (получающемся из требования $\delta S = 0$ при варьировании J^k с дополнительным условием $\delta J^k/\delta x^k = 0$) также фигурировал тензор a_{ik}. Отсюда был сделан вывод, что тензор α_{ik}, параметризующий тензор a_{ik} согласно первому из соотношений (21), носит вспомогательный характер, а уравнение гравитационного поля обязано содержать именно a_{ik}, а не α_{ik}. Следовательно, $L_{(g)}$ (17) (с точностью до прибавления 4-дивергенции) должен выражаться через a_{ik}, а из этого требования, в свою очередь, получаются следующие значения коэффициентов в (18): $b_1 = 1$, $b_2 = -2$. Для соответствующего $L_{(g)}$ уравнение поля (15) приводится к виду

$$\sqrt{-a}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}a_{ik}R\right) = \frac{8\pi\gamma}{c^4}a_{kj}T_i^k,$$

где $R_{ik} \equiv \left(\frac{\partial\Gamma^v_{ik}}{\partial x^v} - \frac{\partial\Gamma^v_{iv}}{\partial x^k} + \Gamma^\mu_{ik}\Gamma^\nu_{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{iv}\Gamma^v_{k\mu}\right)$, $\Gamma^\mu_{mn} \equiv \frac{1}{2}\tilde{a}^{\mu l}\left(\frac{\partial a_{lm}}{\partial x^n} + \frac{\partial a_{ln}}{\partial x^m} - \frac{\partial a_{mn}}{\partial x^l}\right)$, $R \equiv \tilde{a}^{ik}R_{ik}$, и после замен (2), а также замены $T_{ik} \to T_{ik}/\sqrt{-g}$, оно принимает вид уравнения Эйнштейна (в котором g_{ik} – метрический тензор риманова пространства).

Квантово-механическое рассмотрение частицы с нулевым спином ничего нового в обсуждаемый вопрос не вносит – в лагранжиане L (20) и, соответственно, в "уравнении движения" (22) также фигурирует a_{ik}, а не α_{ik}. Однако в случае частицы со спином 1/2 ситуация меняется – лагранжиан свободной частицы линеен по первым производным,

$$L_0 = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_n}\gamma_n\Psi\right) - \frac{mc}{\eta}\bar{\Psi}\Psi$$

(γ^n – матрицы Дирака, $\gamma_n = g_{nl}\gamma^l$, $\bar{\Psi}$ – дираковски-сопряженный спинор), так что в присутствии гравитационного поля в соответствии с (8) лагранжиан будет иметь вид

$$L = \frac{i}{2}\alpha\left(\bar{\Psi}\tilde{\alpha}^{kn}\gamma_n\frac{\partial\Psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^k}\tilde{\alpha}^{kn}\gamma_n\Psi\right) - \frac{mc}{\eta}\alpha\bar{\Psi}\Psi \tag{26}$$

и будет содержать α_{ik}, а не a_{ik}. Требуя экстремальность S (8), где L дается (26), получаем уравнение Дирака в присутствии гравитационного поля:

$$i\alpha\tilde{\alpha}^{kn}\gamma_n\frac{\partial\Psi}{\partial x^k} + \frac{i}{2}\frac{\partial(\alpha\tilde{\alpha}^{kn})}{\partial x^k}\gamma_n\Psi - \frac{mc}{\hbar}\alpha\Psi = 0 \tag{27}$$

(из него вытекает сохранение 4-тока $\mathcal{J}^k = \alpha\tilde{\alpha}^{kn}\bar{\Psi}\gamma_n\Psi$).

Поскольку в "уравнении движения" (27) фигурирует тензор α_{ik}, то, казалось бы, именно этот тензор (а не его квадрат a_{ik} (21)) должен быть принят в качестве "основного" тензора, задающего гравитационное поле. Если это так, то вопрос о численных значениях коэффициентов $b_{1,2}$ в (18) вновь оказывается открытым[2].

Максимальной простотой отличается случай $b_1 = b_2 = 0$ (что чисто формально отмечалось и в [1]). При этом лагранжиан $L_{(g)}$ (17) с учетом (21) приводится к виду

$$L_{(g)} = \frac{c^4}{16\pi\gamma}\alpha\tilde{a}^{m\mu}\tilde{a}^{n\nu}G_{lmn}G^l_{\mu\nu}, \tag{28}$$

где "тензор гравитационного поля" (аналог тензора электромагнитного поля) определяется выражением $G_{lmn} \equiv \dfrac{\partial\alpha_{ln}}{\partial x^m} - \dfrac{\partial\alpha_{lm}}{\partial x^n}$.

Подведем итоги. Предполагается, что гравитационное поле задается шестнадцатью величинами, образующими тензор α_{ik} (квадрат этого тензора – симметричный тензор a_{ik} (21) – прототип метрического тензора в ОТО). "Включение" гравитационного поля осуществляется по правилам (6) и (7), так что полное действие дается выражением (9) – такая схема охватывает как частицы с нулевым спином, так и частицы со спином 1/2 (в ОТО уравнение Дирака рассматривается отдельно). Лагранжиан гравитационного поля

[2] Не исключено, что однозначность может внести требование, чтобы вариационный принцип выполнялся как принцип именно наименьшего (а не стационарного) действия.

$L_{(g)}$, фигурирующий в полном действии (9), имеет вид (17), где $A^{l\lambda}_{pq\sigma\tau}$ дается выражением (18), в котором численные коэффициенты $b_{1,2}$ окончательно не определены. Наиболее простому варианту теории соответствуют коэффициенты $b_1 = b_2 = 0$; в этом случае $L_{(g)}$ дается (28) и уравнение гравитационного поля (15) выглядит наиболее просто.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Микаэлян, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 12, 3 (2007).

[2] W. Thirring, Fortschr. Phys. **7**, 79 (1959).

[3] W. Thirring, Ann. Phys. (USA) **16**, 96 (1961).

[4] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей (М., Наука, 1984).

Институт общей физики
им. А.М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 29 мая 2008 г.