

УДК 530.12

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЛАПСА НЕЙТРОННОЙ ЖИДКОСТИ С УЧАСТИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. РЕЗУЛЬТАТЫ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ДРУГИЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

С. Л. Березницкий

Приводятся результаты численных расчетов динамической задачи о коллапсирующем цилиндре нейтронной сверхпроводящей жидкости с участием электромагнитного поля. Обсуждаются численные методы. Дополнительно рассматривается описание нейтронной жидкости при наличии электромагнитного поля квантовым способом аналогично уравнениям сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау.

1. *Краткое описание численных методов, результаты расчетов и их обсуждение.* Кратко рассмотрим основы численных методов, используемых для получения результатов в рассматриваемой задаче. Для расчета движения нейтронной жидкости используется метод конечных элементов [1], для расчётов гравитационного и электромагнитного полей также используются конечные элементы, но это уже не является классическим использованием методом конечных элементов. Рассмотрим вначале расчет гравитационного и электромагнитных полей. В качестве основных переменных гравитационного поля принимались величины: ϵ^* , $\frac{\partial \epsilon^*}{\partial t}$, f_3 , $\frac{\partial f_3}{\partial t}$, где ϵ^* берется из (21) в [2]. В соответствии с [2], в каждый момент времени t величина f_0 получается интегрированием по радиусу r от центра при помощи одного из уравнений Эйнштейна (16) из [2] или в других переменных (32) из [2] (G для внешней области с электромагнитным полем). В качестве основных переменных для электромагнитного поля принимаются компоненты электромагнитного поля E (или в других переменных E^* из (27) в [2]) и H . Все эти переменные аппроксимируются при помощи одномерных конечных элементов. Каждый конечный

элемент внутри описывается полиномом 3-й степени. Коэффициенты полинома определяются значением функции и ее первой производной по радиусу на границах отрезка (конечного элемента), всего 4 параметра, столько же, сколько коэффициентов полинома. При переходе от одного конечного элемента к другому функция непрерывна вместе со своей первой производной по радиусу. Таким образом, в случае n узлов, вся функция определяется $2n$ параметрами. В каждый момент времени t , зная рассмотренные величины, при помощи уравнений (12), (13), (17), (19) из [2] (или в других переменных (26), (28), (29), (33), (34), из [2]), можно получить величины: $\frac{\partial^2 \epsilon^*}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}$, $\frac{\partial E}{\partial t}$ (или $\frac{\partial E^*}{\partial t}$), $\frac{\partial H}{\partial t}$, а следовательно можно определить основные величины в момент времени $t + \Delta t$. Далее все величины преобразуются в зависящие от времени параметры аппроксимации с учетом краевых и стыковочных условий. Таким образом осуществляется переход от момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$. Фактически для параметров аппроксимации решается система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени от момента времени $t = 0$ до других моментов времени $t > 0$.

Рассмотрим численную реализацию движения нейтронной жидкости. Введем внутри области с нейтронной жидкостью произвольный четырехвектор U_i и величину D , равную сумме 4-мерного интеграла по этой области между двумя гиперповерхностями, соответствующими двум произвольным моментам времени t_1 и t_2 , и 3-мерного интеграла по поверхности нейтронной жидкости и времени между теми же гиперповерхностями для моментов времени t_1 и t_2 :

$$D = \frac{1}{2} \int_{V_4} T^{ij}(U_{i;j} + U_{j;i})\sqrt{-g}d\Omega + \int_{S_3} P^* g^{ij} n_j U_i \sqrt{-g}dS, \quad (1.1)$$

где T^{ij} – тензор энергии-импульса, n_j – четырехвектор нормали, P^* – давление на границе нейтронной жидкости, g^{ij} – метрический тензор, g – его определитель. Нетрудно убедиться, что после преобразования 4-мерного интеграла по формуле Гаусса, D может быть представлена в виде:

$$D = - \int_{V_4} T^{ij}_{;j} U_i \sqrt{-g}d\Omega + \int_{S_1} (P^* - P) g^{ij} n_j U_i \sqrt{-g}dS. \quad (1.2)$$

Если ввести требование $D = 0$, то, исходя из (1.2) и того, что U_i – произвольный четырехвектор, следует $T^{ij}_{;j} = 0$ внутри области нейтронной жидкости и $P = P^*$ на границе нейтронной жидкости. Это является уравнениями движения нейтронной жидкости и условиями на ее границе. Далее для нейтронной жидкости вводится конечный элемент,

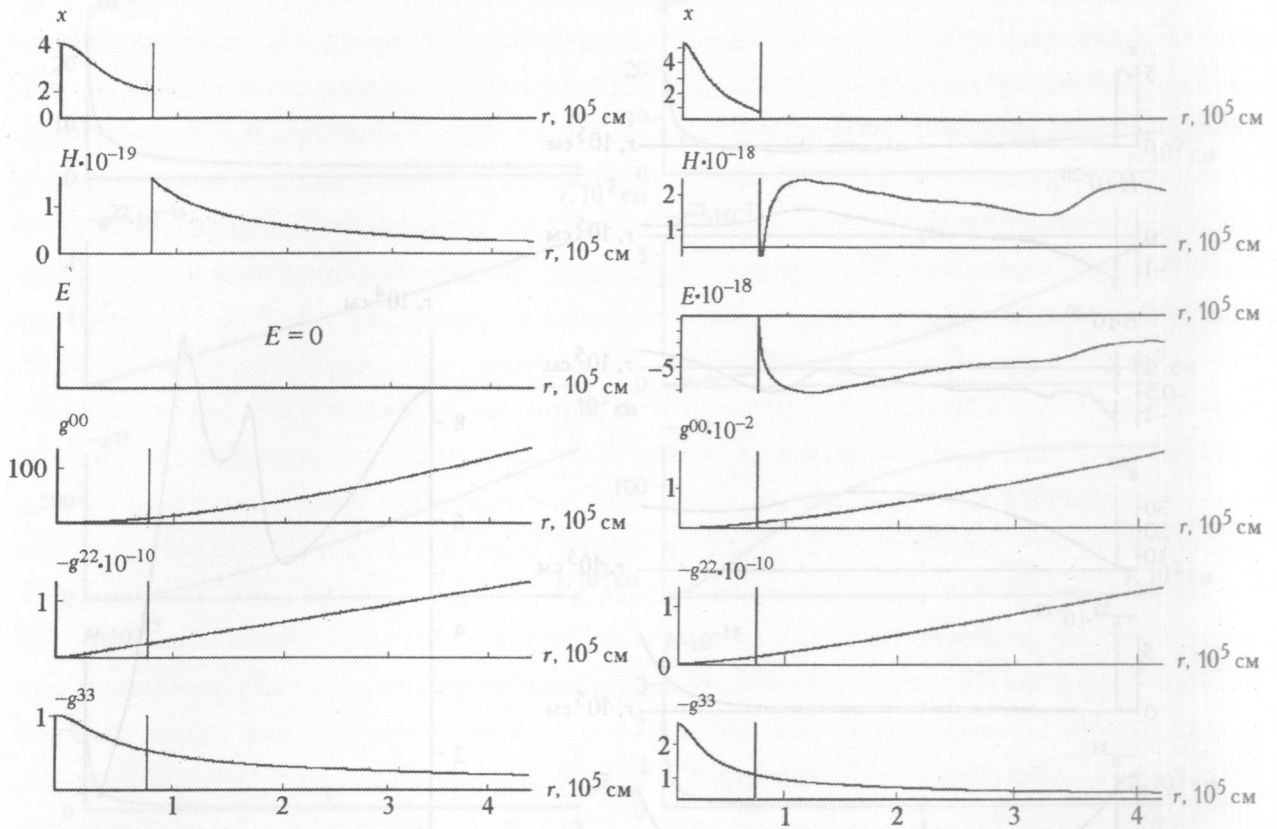


Рис. 1. Основные физические величины. Момент времени $t = 0$. Длина нормирована на 1 см, время – на время прохождения светом расстояния в 1 см ($0.333 \cdot 10^{-10}$ сек).

Рис. 2. Основные физические величины. Момент времени $t = 1 \cdot 10^5$.

внутри которого барионная плотность считается одинаковой, скорость жидкости меняется по линейному закону от радиуса. Ввиду сохранения барионного заряда, полный барионный заряд каждого конечного элемента не меняется и является константой. Движения границ конечных элементов, как функции их координат от времени, являются искомыми. Каждому конечному элементу фактически соответствует частичка нейтронной жидкости, движение которой исследуется. Далее принимаются отличными от нуля только U_0 и U_1 . При этом они считаются непрерывными кусочно-линейными функциями с узлами там, где границы элементов. Таким образом, класс функций U_0 и U_1 сужен до кусочно-линейных функций. Теперь степени свободы этих функций определяются только значениями их в узлах. Если для рассмотренных конечных элементов использовать (1.1) и потребовать $D = 0$, то из произвольности U_0 и U_1 в узлах получим уравнения дви-

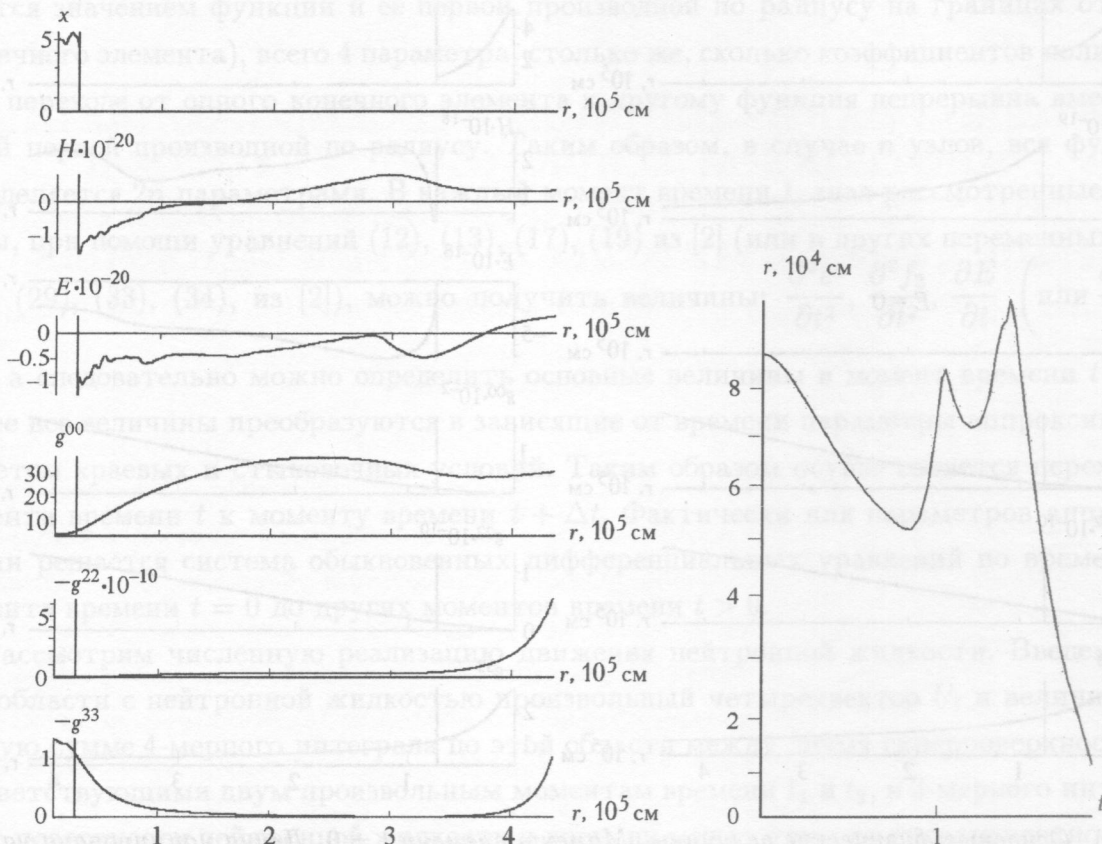


Рис. 3. Основные физические величины. Момент времени $t = 1.8 \cdot 10^5$.

Рис. 4. Изменение во времени радиуса цилиндра.

жения конечных элементов. В рассматриваемой постановке задачи, уравнения движения в пределе при стремлении длины конечного элемента к нулю, переходят в два уравнения движения из [2]: (10), (11). Из двух полученных уравнений движения оставляется только одно, соответствующее пространственной переменной. Второе уравнение, соответствующее временной переменной, отбрасывается, так как его заменяет условие сохранения полного барионного заряда каждого конечного элемента. В итоге получаются уравнения движения системы конечных элементов для нейтронной жидкости. Это обыкновенная система дифференциальных уравнений по времени, которая решается аналогично уравнениям для гравитационного и электромагнитного полей.

Рассмотрим результаты численного расчета для рассматриваемой задачи. Результаты расчета во времени одного из вариантов приведены на рис. 1-3. Расчет проводился в

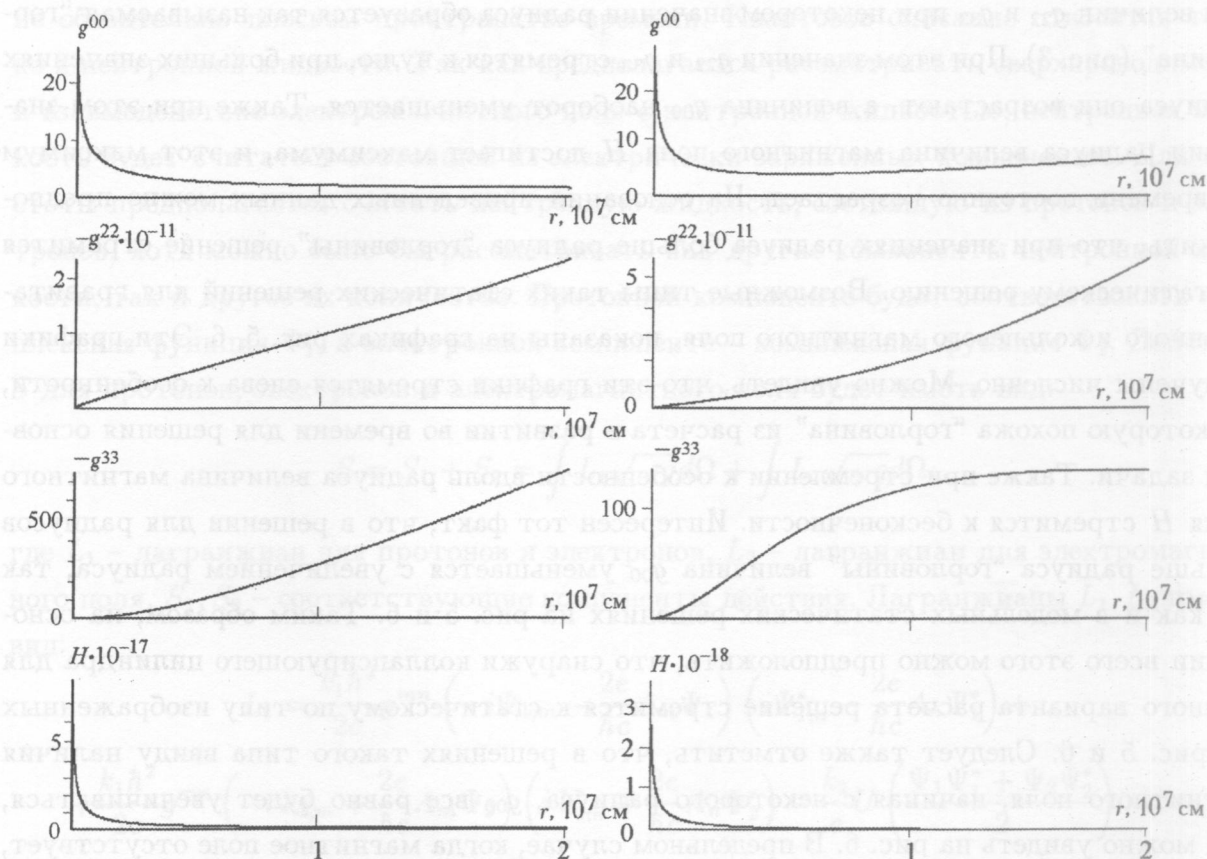


Рис. 5. Статическое решение. Вариант, приближающийся к варианту решения без магнитного поля.

Рис. 6. Статическое решение. Вариант с более сильным влиянием магнитного поля на компоненты метрического тензора.

системе переменных, устраняющих особенность $g_{00} = 0$. На рисунках показаны зависимости от r в разные моменты времени, начиная с начального $t = 0$, следующих величин: x (x – величина, связанная с барионной плотностью в (1) из [2]), H – магнитное поле, E^* – электрическое поле в новых переменных из (27) в [2], компоненты метрического тензора g_{00} , g_{22} , g_{33} . Вертикальной линией на графиках показана граница между областями с нейтронной жидкостью и электромагнитным полем. На рис. 4 показан график изменения во времени радиуса границы нейтронной жидкости. Как можно увидеть из графиков, после совершения некоторых колебаний, граница нейтронной жидкости начинает постоянно сжиматься и ее радиус уменьшается в несколько раз. По-видимому, это можно считать началом и развитием коллапса. При этом в процессе развития коллапса

для величин g_{22} и g_{33} при некотором значении радиуса образуется так называемая “горловина” (рис. 3). При этом значении g_{22} и g_{33} стремятся к нулю, при больших значениях радиуса они возрастают, а величина g_{00} наоборот уменьшается. Также при этом значении радиуса величина магнитного поля H достигает максимума, и этот максимум во времени постоянно возрастает. На основании приведенных данных можно предположить, что при значениях радиуса больше радиуса “горловины” решение стремится к статическому решению. Возможные типы таких статических решений для гравитационного и кольцевого магнитного поля, показаны на графиках рис. 5, 6. Эти графики получены численно. Можно увидеть, что эти графики стремятся слева к особенности, на которую похожа “горловина” из расчета в развитии во времени для решения основной задачи. Также при стремлении к особенности вдоль радиуса величина магнитного поля H стремится к бесконечности. Интересен тот факт, что в решении для радиусов больше радиуса “горловины” величина g_{00} уменьшается с увеличением радиуса, так же как и в модельных статических решениях на рис. 5 и 6. Таким образом, на основании всего этого можно предположить, что снаружи коллапсирующего цилиндра для данного варианта расчета решение стремится к статическому по типу изображенных на рис. 5 и 6. Следует также отметить, что в решениях такого типа ввиду наличия магнитного поля, начиная с некоторого радиуса, g_{00} все равно будет увеличиваться, как можно увидеть на рис. 6. В предельном случае, когда магнитное поле отсутствует, g_{00} может уменьшаться вплоть до сколь угодно больших радиусов, как это следует из аналитического решения (35) в [2]. Нельзя исключать возможность того, что подобные решения могут иметь практическую реализацию в больших космических масштабах. Может быть, такие решения имеют отношение к линейным объектам, рассматриваемым в работе [3]. Следует еще отметить, что реализация решения во времени сильно зависит от маленьких возмущений. Несмотря на это, большинство вариантов для данного стартового решения практически всегда завершалось коллапсом, но при этом в некоторых случаях g_{00} с увеличением радиуса возрастало. Таким образом, приведенный в данной работе вариант не является единственно возможным сценарием развития коллапса. Кроме того, некоторые стартовые решения при развитии во времени вообще коллапсом не заканчивались. Все эти варианты расчетов в данной работе не приведены из-за слишком большого количества графиков.

2. Квантовое описание нейтронной жидкости при наличии электромагнитного поля аналогично уравнениям сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау. Рассматривается движение нейтронной жидкости и изменение электромагнитного поля в произвольном,

не обязательно плоском пространстве-времени. Квантовое описание относится только к нейтронной жидкости. Так как предполагается рассматривать сверхпроводимость и взаимодействие электромагнитного поля с нейтронной жидкостью, нейтронная жидкость будет считаться состоящей из электрически заряженных компонентов. Для простоты предполагается считать нейтронную жидкость, состоящую из протонов и электронов, хотя можно было бы рассматривать как другие компоненты нейтронной жидкости, так и другое их количество. Протонной компоненте будет соответствовать комплексная функция Ψ_1 , а электронной компоненте – комплексная функция Ψ_2 . Действие S для протонов, электронов и электромагнитного поля будет иметь вид:

$$S = S_1 + S_2 = \int L_1 \sqrt{-g} d\Omega + \int L_2 \sqrt{-g} d\Omega,$$

где L_1 – лагранжиан для протонов и электронов, L_2 – лагранжиан для электромагнитного поля, S_1, S_2 – соответствующие компоненты действия. Лагранжианы L_1, L_2 имеют вид:

$$L_1 = \frac{k_1 \hbar^2}{2c} g^{mn} \left(-i\Psi_{1;m} - \frac{2e}{\hbar c} A_m \Psi_1 \right) \left(i\Psi_{1;n}^* - \frac{2e}{\hbar c} A_n \Psi_1^* \right) + \frac{k_1 \hbar^2}{2c} g^{mn} \left(-i\Psi_{2;m} + \frac{2e}{\hbar c} A_m \Psi_2 \right) \left(i\Psi_{2;n}^* + \frac{2e}{\hbar c} A_n \Psi_2^* \right) - \frac{k_2}{c} U \left(\frac{\Psi_1 \Psi_1^* + \Psi_2 \Psi_2^*}{2} \right), \quad (2.1)$$

$$L_2 = -\frac{1}{16\pi c} F_{ik} F^{ik},$$

где c – скорость света, \hbar – постоянная Планка, k_1, k_2 – некоторые константы, e – абсолютная величина заряда электрона, U – некоторая вещественная функция от вещественного аргумента $\frac{\Psi_1 \Psi_1^* + \Psi_2 \Psi_2^*}{2}$, F^{ik} – тензор электромагнитного поля, A_n – 4-мерный потенциал электромагнитного поля, * – символ комплексного сопряжения. Попытка отразить наличие разных масс у протона и электрона не даст ничего нового, а только приведет к умножению на некоторые коэффициенты функций Ψ_1 и Ψ_2 . По тем же самым причинам, как это будет видно дальше, конкретные значения констант k_1 и k_2 на физические результаты не влияют. После варьирования $\delta S = 0$ по Ψ_1^*, Ψ_2^*, A_n получаются следующие уравнения:

$$k_1 \hbar^2 g^{mn} \left[-\Psi_{1;mn} + \frac{2e}{\hbar c} i (A_n \Psi_{1;m} + A_m \Psi_{1;n} + A_{m;n} \Psi_1) + \frac{4e^2}{\hbar^2 c^2} A_m A_n \Psi_1 \right] - k_2 \Psi_1 U' \left(\frac{\Psi_1 \Psi_1^* + \Psi_2 \Psi_2^*}{2} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$k_1 \hbar^2 g^{mn} \left[-\Psi_{2;mn} + \frac{2e}{\hbar c} i (A_n \Psi_{2;m} + A_m \Psi_{2;n} + A_{m;n} \Psi_2) + \frac{4e^2}{\hbar^2 c^2} A_m A_n \Psi_2 \right] - k_2 \Psi_1 U' \left(\frac{\Psi_1 \Psi_1^* + \Psi_2 \Psi_2^*}{2} \right) = 0, \quad (2.3)$$

$$F_{;k}^{ik} = -4\pi J^{(Q)i}, \quad (2.4)$$

где U' – 1-ая производная функции U по своему аргументу,

$$J^{(Q)m} = -\frac{k_1 \hbar^2}{2} \left\{ g^{mn} \left[\frac{2e}{\hbar c} i (\Psi_1^* \Psi_{1;n} - \Psi_1 \Psi_{1;n}^*) + \frac{8e^2}{\hbar^2 c^2} A_n \Psi_1 \Psi_1^* \right] + g^{mn} \left[-\frac{2e}{\hbar c} i (\Psi_2^* \Psi_{2;n} - \Psi_2 \Psi_{2;n}^*) + \frac{8e^2}{\hbar^2 c^2} A_n \Psi_2 \Psi_2^* \right] \right\}.$$

Вектор $J^{(Q)m}$ является четырехвектором полного электрического тока. Он может быть разбит на две составляющие:

$$J^{(Q)M} = J^{(Q_1)m} + J^{(Q_2)m}, \quad (2.5)$$

где:

$$J^{(Q_1)m} = -\frac{k_1 \hbar^2}{2} g^{mn} \left[\frac{2e}{\hbar c} i (\Psi_1^* \Psi_{1;n} - \Psi_1 \Psi_{1;n}^*) + \frac{8e^2}{\hbar^2 c^2} A_n \Psi_1 \Psi_1^* \right], \quad (2.6)$$

$$J^{(Q_2)m} = -\frac{k_1 \hbar^2}{2} g^{mn} \left[-\frac{2e}{\hbar c} i (\Psi_2^* \Psi_{2;n} - \Psi_2 \Psi_{2;n}^*) + \frac{8e^2}{\hbar^2 c^2} A_n \Psi_2 \Psi_2^* \right]. \quad (2.7)$$

Векторы $J^{(Q_1)m}$ и $J^{(Q_2)m}$, в силу уравнений (2.2) и (2.3), удовлетворяют по отдельности уравнениям сохранения заряда: $J_{;m}^{(Q_1)m} = 0$, $J_{;m}^{(Q_2)m} = 0$.

Следовательно, $J^{(Q_1)m}$ и $J^{(Q_2)m}$ можно рассматривать как четырехвекторы электрического тока для протонной и электронной компонент нейтронной жидкости. Будут также еще два вектора тока, пропорциональные рассмотренным: $J^{(1)m} = \frac{1}{e} J^{(Q_1)m}$, $J^{(2)m} = -\frac{1}{e} J^{(Q_2)m}$, которые также удовлетворяют уравнениям заряда: $J_{;m}^{(1)m} = 0$, $J_{;m}^{(2)m} = 0$. Вектора $J^{(1)m}$ и $J^{(2)m}$ соответствуют количеству зарядов. Вектор $J^{(1)m}$ можно считать также соответствующим барионному заряду. Можно получить также выражение для полного тензора энергии-импульса системы T^{ij} на основании следующей формулы [4] для вариации действия S при варьировании компонентов метрического тензора g_{ij} :

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.8)$$

и из сравнения ее с формулой для δS :

$$\delta S = \int \left(\delta L - \frac{1}{2} L g_{ik} \delta g^{ik} \right) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.9)$$

где L – лагранжиан системы. Здесь в общем случае, из за громоздкости, выражение для T_{ij} не приводится, но формулы (2.8), (2.9) будут дальше использованы для частных случаев.

Рассмотрим частный случай системы без электромагнитного поля и когда полный четырехвектор электрического тока равен нулю. При этом: $A_i = 0$, $J^{(Q)m} = J^{(Q_1)m} + J^{(Q_2)m} = 0$, $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$. Уравнениям (2.2) и (2.3) будет соответствовать одно уравнение:

$$k_1 \hbar^2 g^{mn} \Psi_{;mn} + k_2 \Psi U'(\Psi \Psi^*) = 0. \quad (2.10)$$

При этом вектор барионного тока J^m будет иметь вид:

$$J^m = J^{(1)m} = J^{(2)m} = -\frac{k_1 \hbar}{c} i g^{mn} (\Psi^* \Psi_{;n} - \Psi \Psi^*_{;n}).$$

Теперь также, как и в [5], сделаем предельный переход при стремлении постоянной Планка \hbar к нулю, чтобы проследить переход квантовых формул в их классический аналог. Для этого функция Ψ представляется в виде: $\Psi = f e^{i\varphi/\hbar}$. В этих переменных уравнение (2.10) будет иметь вид:

$$f [k_2 U'(f^2) - k_1 g^{mn} \varphi_{;m} \varphi_{;n}] + i k_1 \hbar g^{mn} (\varphi_{;mn} f + \varphi_{;m} f_{;n} + \varphi_{;n} f_{;m}) + k_1 \hbar^2 g^{mn} f_{;mn} = 0. \quad (2.11)$$

Если пренебречь, ввиду малости \hbar , членом с \hbar^2 по сравнению с другими членами, то из (2.11) получается два уравнения:

$$k_2 U'(f^2) - k_1 g^{mn} \varphi_{;m} \varphi_{;n} = 0, \quad (2.12)$$

$$g^{mn} (\varphi_{;mn} f + \varphi_{;m} f_{;n} + \varphi_{;n} f_{;m}) = 0. \quad (2.13)$$

Введем обозначение: $R = f^2$. Вектор барионного тока J^m в новых переменных будет иметь вид: $J^m = \frac{2k_1}{c} R g^{mn} \varphi_{;n}$. В силу уравнений (2.12) и (2.13) он также будет удовлетворять уравнению сохранения барионного заряда: $J^m_{;m} = 0$. Лагранжиан L для данной системы может быть получен из (2.1) при предельном переходе, когда \hbar стремится к нулю. Он имеет вид:

$$L = \frac{k_1}{c} R g^{mn} \varphi_{;m} \varphi_{;n} - \frac{k_2}{c} U(R), \quad (2.14)$$

где φ – независимая функция, а R выражается через $\varphi_{;j}$ из соотношения:

$$k_1 g^{ij} \varphi_{;i} \varphi_{;j} = k_2 U'(R). \quad (2.15)$$

Также нетрудно независимо убедиться, что приравнивание вариации действия, на основе лагранжиана (2.14), нулю приводит к уравнениям (2.12) и (2.13). На основании (2.8), (2.9), (2.14), (2.15) можно получить выражение для тензора энергии–импульса классической системы:

$$T_{ik} = 2k_1 R \varphi_{;i} \varphi_{;k} + k_2 g_{ik} [U(R) - RU'(R)]. \quad (2.16)$$

Это выражение также могло быть получено при предельном переходе из общего выражения для тензора энергии–импульса квантовой системы (это выражение из-за громоздкости не приводилось в данной работе). Оба способа приводят к одному и тому же выражению (2.16). Нетрудно убедиться, что рассматриваемая классическая система соответствует жидкости, у которой сохраняется некоторый заряд (барионный). Для жидкости 4-скорость u' должна удовлетворять нормировочному соотношению (3) из [2]. Оно аналогично (2.15), отсюда получаем: $u' = \varphi_{;i} \sqrt{\frac{k_1}{k_2 U'(R)}}$. Учитывая, что четырех-вектор барионного тока равен $\rho u'$, получаем выражение для барионной плотности ρ :

$$\rho = \frac{2}{c} R \sqrt{k_1 k_2 U'(R)}. \quad (2.17)$$

Для того чтобы (2.16) соответствовало общему выражению тензора энергии–импульса жидкости (4) в [2], необходимо, чтобы давление жидкости P и плотность энергии жидкости ϵ удовлетворяли соотношениям:

$$P + \epsilon = 2k_2 RU'(R), \quad (2.18)$$

$$P = k_2 (RU'(R) - U(R)). \quad (2.19)$$

Отсюда получаем выражение для плотности энергии ϵ :

$$\epsilon = k_2 (RU'(R) + U(R)). \quad (2.20)$$

Выражения (2.17), (2.19) и (2.20) дают возможность вычислить ρ , ϵ , P через k_1 , k_2 , R , $U(R)$, $U'(R)$. Нетрудно убедиться, что для произвольной функции U будет выполняться дифференциальное соотношение (2) из [2], как и должно быть для жидкости с сохраняющимся барионным зарядом. Точно так же, для любых заданных законов $P = P(\rho)$, $\epsilon = \epsilon(\rho)$ при обязательном выполнении (2) из [2] (что обеспечивает сохранение барионного заряда) может быть при заданных k_1, k_2 однозначно определена

функция $U = U(R)$ при помощи параметрических формул обратного преобразования:
$$R = \frac{c^2}{2k_1} \frac{\rho}{\epsilon + P}, \quad U(R) = \frac{1}{2k_2} (\epsilon - P).$$

Как нетрудно увидеть, k_1 и k_2 на физические результаты не влияют. На физические результаты влияют только заданные зависимости для уравнений состояния нейтронной жидкости $P = P(\rho)$, $\epsilon = \epsilon(\rho)$, при обязательном выполнении дифференциального условия (2) из [2]. Заданием величин k_1 и k_2 и уравнениями состояния нейтронной жидкости однозначно определяется функция $U = U(R)$, что уже позволяет решать общую задачу с протонной и электронной компонентами нейтронной жидкости и с электромагнитным полем. Изменение величин k_1 и k_2 вызовет только умножение величин Ψ_1 и Ψ_2 , а также функции $U(R)$ на некоторые множители, но не вызовет изменения измеримых физических величин: четырехвектора тока электрического и барионного зарядов, плотности энергии, импульса и т.д.

Уравнения (2.2)–(2.7) можно рассматривать в качестве обобщения уравнений Гинзбурга–Ландау [6] для сверхпроводимости. Эти уравнения полностью описывают систему из нейтронной жидкости, состоящей из протонной и электронной компоненты и электромагнитного поля. Они также применимы в общей теории относительности. В этом случае к ним добавляются уравнения Эйнштейна с соответствующим тензором энергии–импульса. Как уже отмечалось, число компонент в нейтронной жидкости может быть и другим, но в любом случае уравнения можно применять для сверхплотной нейтронной жидкости в квантовом представлении при наличии электромагнитного поля. Как уже было показано, обычному неклассическому решению задачи соответствует квантовое, которое по основным физическим величинам является очень мало отличающимся от неклассического решения. Отличие решений состоит в том, что в классическом решении электрический ток течет в граничной поверхности нейтронной жидкости и электромагнитное поле не проникает за эту границу внутрь нейтронной жидкости. В квантовом решении граница будет иметь малую, но конечную эффективную толщину. В пределах этой толщины электромагнитное поле будет проникать внутрь нейтронной жидкости. Также в случае отсутствия электромагнитного поля в классическом решении будет наблюдаться граница нейтронной жидкости, на которой давление жидкости равно нулю. В квантовом решении эта граница будет размыта. Вне этой границы модуль комплексной функции Ψ будет очень маленьким и будет стремиться к нулю при уходе на бесконечность. В пределах узкой размытой границы значение модуля Ψ будет резко уменьшаться. Как в случае электромагнитного поля, так и при его отсутствии, квантовый подход позволяет определить эффективную толщину границы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О. Зенкевич, *Метод конечных элементов в технике* (М., Мир, 1975).
- [2] С. Л. Березницкий, Краткие сообщения по физике ФИАН **36**(6), 3 (2009).
- [3] S. L. Bereznitsky and D. Yu. Tsvetkov, *Astronomical and Astrophysical Transactions* **26**(4-5), 285 (2007).
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1988).
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М., Наука, 1989).
- [6] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2* (М., Наука, 1973).

Поступила в редакцию 19 ноября 2008 г.