

К КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев

Изложена квантовая теория вынужденного черенковского излучения электронным пучком продольных волн в изотропной плазме. Получены нерелятивистские квантовые нелинейные уравнения черенковской пучково-плазменной неустойчивости. В линейном приближении выведено квантовое дисперсионное уравнение и определены инкременты развития неустойчивости.

1. Работа посвящена учету квантовых эффектов при резонансной черенковской неустойчивости электронного пучка малой плотности в плотной плазме. Считаем, что и пучок и плазма являются холодными, столкновения отсутствуют, а движение ионов плазмы можно не учитывать. Квантовое описание используем только для электронов пучка, а плазму будем описывать при помощи классических уравнений. Известно, что в отсутствие столкновений наиболее общее описание системы заряженных частиц осуществляется при помощи матрицы плотности [1, 2]. Если разброс частиц по импульсам отсутствует, то матрица плотности выражается через произведение волновых функций, а уравнение для матрицы плотности сводится к уравнению Шредингера. Поэтому, описывая электроны пучка, мы будем использовать уравнение Шредингера, дополненное уравнением для самосогласованного поля (в потенциальном приближении). Заметим, что эквивалентность квантовых подходов, использующих уравнение для матрицы плотности, уравнение для волновой функции с последующим усреднением по функции распределения, и уравнения квантовой гидродинамики [3], была показана нами в работе [4].

Пусть безграничный электронный пучок плотности n_{0e} движется со скоростью \vec{v} в холодной безграничной электронной плазме с плотностью n_{0p} . Рассмотрим возбуждение пучком плазменной волны, распространяющейся в том же направлении, что и пучок.

Учитывая сказанное выше, исходим из следующей системы уравнений для волновой функции электронов пучка $\psi(t, z)$, скалярного потенциала $\varphi(t, z)$ и возмущения плотности электронов плазмы $\rho_p(t, z)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= e\varphi\psi, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\pi\rho_p &= -4\pi en_{0e}|\psi|^2, \\ \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial t^2} &= \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{0p}/m}$ – электронная ленгмюровская частота плотной плазмы, ось z направлена вдоль скорости \vec{u} , а плотная плазма описывается в линейном приближении. Невозмущенная волновая функция электрона пучка определяется выражениями

$$\psi(t, z) = \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \quad k_0 = \frac{mu}{\hbar}, \quad \omega_0 = \frac{\hbar k_0^2}{2m} = \frac{mu^2}{2\hbar}. \quad (2)$$

Нормировочный множитель у функции (2) отсутствует, поскольку он уже учтен в уравнении для скалярного потенциала φ . В конце работы мы еще обсудим область применимости системы уравнений (1).

2. Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}(t) \exp(ikz) + \tilde{\varphi}^*(t) \exp(-ikz)), \quad (3a)$$

$$\psi = A_0(t) \exp(ik_0 z) + A_-(t) \exp[i(k_0 - k)z] + A_+(t) \exp[i(k_0 + k)z]. \quad (3b)$$

Поясним, что уравнение Шредингера с потенциалом (3a) является дифференциальным уравнением с периодическим коэффициентом φ , что и определяет представление (3b). Подставляя (3) в уравнения (1) и полагая функции $\exp(ikz)$ и $\exp[i(k_0 \mp k)z]$ ортогональными на некотором пространственном периоде L ($L \rightarrow \infty$), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dt} + i\omega_0 A_0 &= -\frac{i}{2\hbar} e(\tilde{\varphi} A_- + \tilde{\varphi}^* A_+), \\ \frac{dA_-}{dt} + i\omega_- A_- &= -\frac{i}{2\hbar} e\tilde{\varphi}^* A_0, \\ \frac{dA_+}{dt} + i\omega_+ A_+ &= -\frac{i}{2\hbar} e\tilde{\varphi} A_0, \\ k^2 \tilde{\varphi} - \rho &= 8\pi en_{0e}(A_0 A_-^* + A_0^* A_+), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\omega_p^2 k^2 \tilde{\varphi}.$$

Здесь

$$\omega_- = \frac{\hbar(k_0 - k)^2}{2m}, \quad \omega_+ = \frac{\hbar(k_0 + k)^2}{2m}, \quad (5)$$

а ω_0 определена в (2). При получении уравнений (4) была сделана замена $4\pi\rho \rightarrow \rho$. Уравнения (4) описывают нелинейную динамику квантовой пучковой неустойчивости в плазме. Мы же здесь ограничимся только линейным приближением.

В линейном приближении $\tilde{\varphi}, \rho \sim \exp(-i\omega t)$. Кроме того, следует положить

$$A_0(t) = \exp(-i\omega_0 t), \quad A_- = a_- \exp[i(\omega - \omega_0)t], \quad A_+ = a_+ \exp[-i(\omega + \omega_0)t], \quad (6)$$

где a_{\mp} – постоянные. При этом из системы (4) получается дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\omega_e^2}{2\omega_{\hbar}} \left(\frac{1}{\omega_0 - \omega - \omega_-} + \frac{1}{\omega_0 + \omega - \omega_+} \right), \quad (7)$$

где $\omega_{\hbar} = \hbar k^2/2m$ – важная для дальнейшего квантовая частота. Уравнение (7) с учетом соотношений

$$\omega_0 - \omega - \omega_- = -[(\omega - ku) + \omega_{\hbar}], \quad \omega_0 + \omega - \omega_+ = (\omega - ku) - \omega_{\hbar} \quad (8)$$

преобразуется к виду [5]

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2}{(\omega - ku)^2 - \omega_{\hbar}^2} = 0, \quad (9)$$

откуда в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ получается простейшее классическое дисперсионное уравнение пучково-плазменного взаимодействия [6].

В одночастичном пределе $\omega_e \rightarrow 0$ из (9) находим квантовое условие черенковского резонанса между электроном и продольной волной

$$\omega = ku \mp \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (10)$$

При резонансе (10) со знаком минус скорость электрона u меньше фазовой скорости волны ω/k , поэтому электрон излучает. При резонансе (10) со знаком плюс происходит обратный процесс – черенковское поглощение.

Черенковской пучковой неустойчивости можно дать интересную квантовую интерпретацию. Возмущение волновой функции электрона пучка, обусловленное взаимодействием с полем плазменных колебаний, имеет следующую структуру:

$$\psi'(t, z) = H' \exp(-i\omega'_0 t + ik'_0 z), \quad \omega'_0 = \frac{\hbar k_0'^2}{2m}. \quad (11)$$

Сопоставление (11) с формулами (3) и (6) приводит к соотношениям

$$k_0 = k'_0 + k, \quad \omega_0 = \omega'_0 + \omega, \quad (12a)$$

$$k'_0 = k_0 + k, \quad \omega'_0 = \omega_0 + \omega. \quad (12b)$$

Пусть, например, $\omega'_0 = \omega_-$. Тогда, как видно из первого выражения (8), второе условие (12a) тождественно условию резонанса (10) со знаком минус. Если же $\omega'_0 = \omega_+$, то тождественными оказываются второе условие (12b) и условие резонанса (10) со знаком плюс. Таким образом, условия (12) эквивалентны условиям черенковского резонанса (10). Но условия (12) являются известными условиями распада волн при трехволновом взаимодействии [7]. При выполнении соотношений (12a) распадается исходная волна де Бройля (2). Причем распадается она с понижением частоты, т.к. $\omega'_0 < \omega_0$. При этом имеет место черенковское излучение продольной волны, а в результате распада появляются плазменная волна (3a) и возмущенная волна де Бройля, описываемая вторым слагаемым в (3б). В случае (12b) $\omega_0 < \omega'_0$ и происходит обратный распад волны (11), т.е. черенковское поглощение электроном пучка продольной волны. При этом имеет место слияние волны де Бройля (2) с плазменной волной (3a), а возникает новая волна де Бройля, определяемая третьим слагаемым в (3б). Следовательно, при квантовом описании электронов резонансное черенковское излучение и поглощение волн в плазме можно трактовать как распад волны де Бройля свободного электрона. Со стороны электрического поля плазменных колебаний на электрон действует сила, описываемая квадратичным членом в уравнении Шредингера, чем и обусловлен механизм распада. Можно сказать, что исходная волна де Бройля дифрагирует на периодическом потенциале плазменных колебаний. При этом, если вторичная волна также оказывается волной де Бройля свободного электрона, то реализуются резонансы (10) и происходит черенковское излучение или поглощение.

3. Перейдем к анализу дисперсионного уравнения (9). При $\omega_p = 0$ из него определяются частоты ленгмюровских волн электронов пучка – быстрой и медленной (рис. 1)

$$\omega = ku \pm \sqrt{\omega_e^2 + \omega_{\hbar}^2}. \quad (13)$$

Эти волны обусловлены наложением ленгмюровских волн $\omega = \pm\omega_e$, одночастичных квантовых волн $\omega = \pm\omega_{\hbar}$ и волны потока $\omega = ku$. Условием применимости спектров (13) является неравенство $\omega_e^2 \ll \omega_{\hbar}^2$, которое мы считаем выполненным. Кроме того, считаем малыми следующие параметры:

$$\mu_{\hbar} = \frac{\hbar\omega_p}{mu^2/2}, \quad \nu_e = \frac{\omega_e^2}{\omega_p^2}, \quad (14)$$

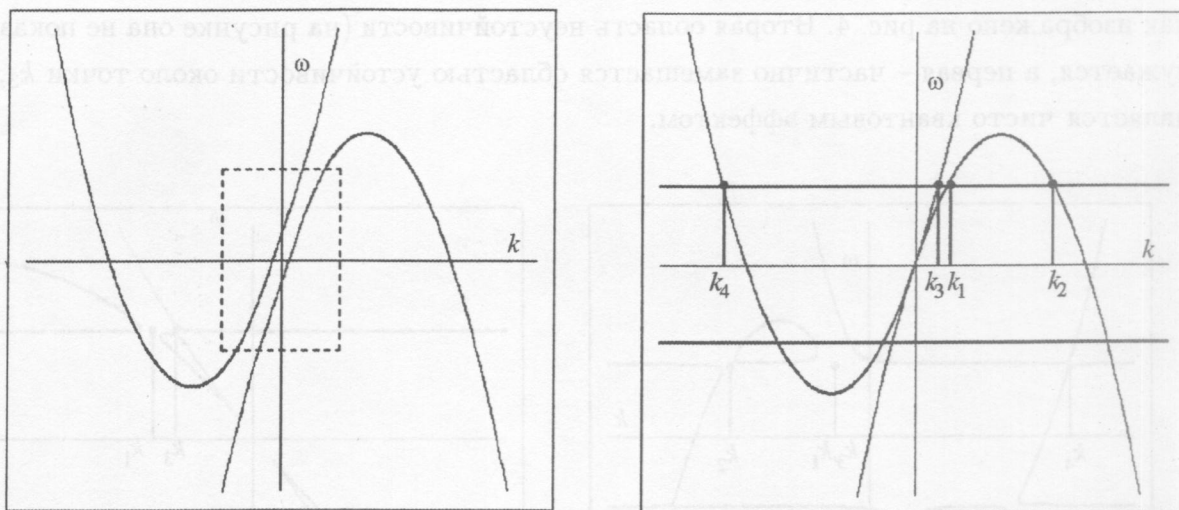


Рис. 1. Типичные дисперсионные зависимости $\omega(k)$ квантовых пучковых волн плотности заряда, в рамке – область “классичности”.

Рис. 2. Точки резонанса пучковых и плазменных волн.

от которых существенно зависит решение дисперсионного уравнения (9). Можно, например, показать, что при $\mu_{\hbar} > 1$ уравнение (9) имеет только действительные решения, т.е. неустойчивость отсутствует.

Подставляя в (10) $\omega = \omega_p$ и учитывая неравенство $\mu_{\hbar} \ll 1$, находим точки одночастичного черенковского резонанса пучка с плазменной волной (рис. 2)

$$k_1 = \frac{\omega_p}{u} \left(1 + \frac{1}{4} \mu_{\hbar} \right), \quad k_2 = 2 \frac{mu}{\hbar},$$

$$k_3 = -2 \frac{mu}{\hbar}, \quad k_4 = \frac{\omega_p}{u} \left(1 - \frac{1}{4} \mu_{\hbar} \right). \quad (15)$$

Величины $k_{1,2}$ в (15) определяют волновые числа плазменных колебаний, резонансных с медленной волной; соответственно $k_{3,4}$ дают волновые числа колебаний плазмы, резонансных с быстрой волной пучка. Типичные дисперсионные кривые при черенковском пучково-плазменном взаимодействии с учетом квантовых эффектов в условиях $\mu_{\hbar} \ll 1$ показаны на рис. 3, 4. Видны две области неустойчивости: в окрестности точки k_1 и в окрестности точки k_2 . В классическом пределе первая область сохраняется, а вторая область – чисто квантовая – уходит на бесконечность. Область неустойчивости около точки k_1 настолько широкая, что перекрывает резонанс у точки k_3 . При уменьшении

плотности пучка дисперсионные кривые, представленные на рис. 3, видоизменяются, как изображено на рис. 4. Вторая область неустойчивости (на рисунке она не показана) сужается, а первая – частично замещается областью устойчивости около точки k_3 , что является чисто квантовым эффектом.

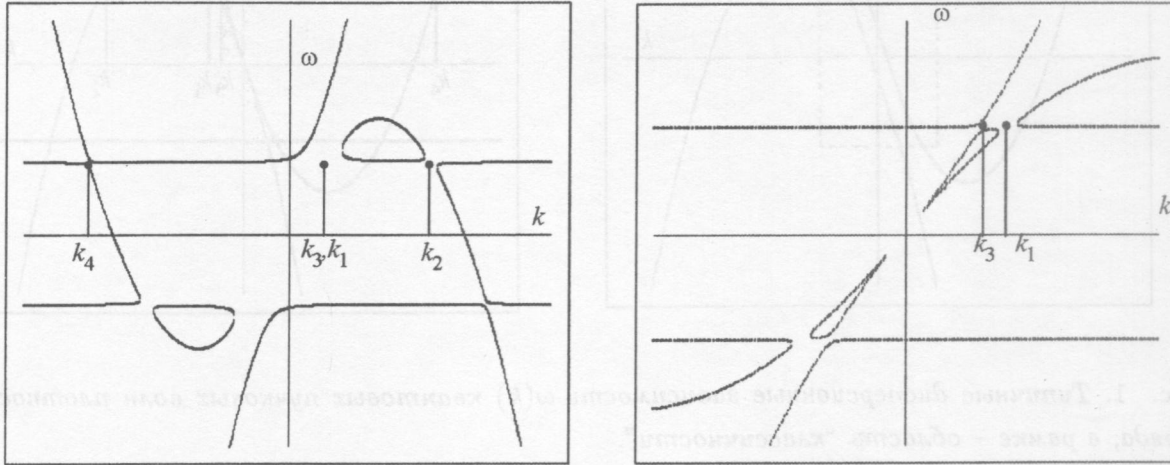


Рис. 3. Дисперсионные кривые при пучково-плазменном взаимодействии для случая $1 \gg \nu_e^{1/3} \gg \mu_\hbar$.

Рис. 4. Дисперсионные кривые при пучково-плазменном взаимодействии для случая $\nu_e^{1/3} \ll \mu_\hbar$.

В окрестности резонансных точек $k_{1,2}$ дисперсионное уравнение (9) при $\nu_e \ll 1$ преобразуется к виду

$$\delta\omega^2 \left(\delta\omega - \frac{\hbar}{m} k_{1,2}^2 \right) = \frac{1}{2} \omega_e^2 \omega_p, \quad (16)$$

где $\delta\omega = \omega - \omega_p$ – комплексный инкремент неустойчивости. Решения кубического уравнения (16) даются следующими формулами:

$$k = k_1 \approx \frac{\omega_p}{u} : \delta\omega = \begin{cases} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \nu_e \right)^{1/3} \omega_p, & 1 \gg \nu_e^{1/3} \gg \mu_\hbar, \\ i \sqrt{\frac{\nu_e}{\mu_\hbar}} \omega_p, & \nu_e^{1/3} \ll \mu_\hbar, \end{cases} \quad (17)$$

$$k = k_2 = \frac{2m u}{\hbar} : \delta\omega = i \frac{1}{4} \sqrt{\mu_\hbar \nu_e} \omega_p.$$

Два инкремента, из приведенных в (17), очевидно являются чисто квантовыми. При $\hbar \rightarrow 0$ второй инкремент переходит в первый, а третий – обращается в ноль. Первый инкремент в (17) совпадает с известным классическим инкрементом обычной резонансной черенковской пучковой неустойчивости в плазме (неустойчивость типа одночастичного вынужденного эффекта Черенкова [8]).

Заметим, что условия резонанса (10) имеют вид условий резонанса при аномальном и нормальном эффектах Доплера

$$\omega = ku \mp \Omega, \quad (18)$$

где Ω – собственная частота колебаний электрона. Например, во внешнем магнитном поле Ω есть электронная циклотронная частота, в случае пучка большой плотности $\Omega \sim \omega_e$. В рассматриваемом здесь случае частота Ω есть квантовая частота ω_{\hbar} . Таким образом квантовые пучковые неустойчивости в плазме аналогичны пучковым неустойчивостям в условиях аномального эффекта Доплера или неустойчивостям типа коллективного вынужденного эффекта Черенкова [8].

Автор благодарен А.А. Рухадзе за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. С. Давыдов, *Квантовая механика* (М., Наука, 1973).
- [2] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред* (М., Атомиздат, 1961).
- [3] Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики* (М., Гостехиздат, 1963).
- [4] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *УФН* **169**(6), 687 (1999).
- [5] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *УФН* **178**(10), 1025 (2008).
- [6] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (М., Высшая школа, 1988).
- [7] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме* (М., Наука, 1976).
- [8] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *УФН* **152**(2), 285 (1987).

Учреждение Российской академии наук

Институт общей физики

им. А.М. Прохорова

Поступила в редакцию 12 июня 2009 г.