УДК 551.466:534.1

КРУТИЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ

М. А. Шерменева

Упругие крутильные нелинейные волны в стержне изучены во втором приближении. Показано, что нелинейная поправка к классическому линейному решению является комбинацией стоячей продольной волны, бегущей продольной волны и бегущей поперечной волны. Решение, описывающее стоячую продольную волну, является квадратичным полиномом от функций Бесселя. Описание бегущей продольной волны и бегущей поперечной волны включает квадратуры от полиномов от функции Бесселя.

1. Упругие крутильные линейные волны в стержне исследуются почти во всех классических книгах по упругим волнам в твердых телах и являются типичным примером поперечных волн (S-волны) [1–5]. Цель этой работы – получить явные формулы для вычисления квадратичной поправки для крутильных волн. Эта поправка естественно разлагается на три слагаемых: стоячая продольная волна, бегущая продольная волна и бегущая поперечная волна. Интегралы, возникающие при вычислении стоячей продольной волны, берутся, и решение является квадратичным полиномом от функций Бесселя. Ситуация аналогична случаю волн в жидкости и газе, где нелинейное решение всегда является квадратичным полиномом от функций Бесселя. (Классический пример разобран в [6], а общий результат доказан в [7].) Наличие стоячей волны означает, что стержень, подверженный крутильным волнам, испытывает постоянную радиальную деформацию. Выражения, описывающие бегущую продольную волну и бегущую поперечную волну, включают решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$Y_{rr} + \frac{1}{r}Y_r + \gamma Y + J_0(r)^2 = 0, \tag{1}$$

которое может быть выражено через квадратуры от кубических полиномов от функции Бесселя. Функции этого типа появляются также в других нелинейных задачах и заслуживают подробного изучения, которое начато в данной статье. Работа сосредоточена на поиске частных решений уравнений указанного типа методом, ранее использованным в [6, 7]. Подразумевается, что остальные решения получаются добавлением функций Бесселя.

2. Нелинейная теория упругости. Здесь приводятся основные формулы трехмерной нелинейной теории упругости [1, 4, 5]. Упругая энергия единицы объема изотропного твердого тела в третьем приближении выражается через вектор-функцию смещения $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ следующим образом:

$$E = \frac{\mu}{4}(u_{i,k} + u_{k,i})(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{\lambda}{2}u_{l,l}u_{l,l} +$$
$$+\left(\mu + \frac{A}{4}\right)u_{i,k}u_{l,i}u_{l,k} + \left(\frac{B}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)u_{l,l}u_{i,k}u_{i,k} +$$
$$+\frac{A}{12}u_{i,k}u_{k,l}u_{l,i} + \frac{B}{2}u_{i,k}u_{k,i}u_{l,l} + \frac{C}{3}(u_{l,l})^3. \qquad (2.1)$$

Здесь и далее используются следующие обозначения для частных производных функции $f(x_1, x_2, x_3) : f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3. Вычисляя тензор напряжений [1, 4, 5]

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial E}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}, \qquad (2.2)$$

получаем

$$\sigma_{ik} = \mu(u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda(u_{l,l})\delta_{ik} +$$
$$+\left(\mu + \frac{A}{4}\right)(u_{l,i}u_{l,k} + u_{i,l}u_{k,l} + u_{i,l}u_{l,k}) + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{B}{2}\right)(u_{l,m}u_{l,m}\delta_{ik} + 2u_{i,k}u_{l,l}) +$$
$$+\frac{A}{4}u_{k,l}u_{l,i} + \frac{B}{2}(u_{l,m}u_{m,l}\delta_{ik} + 2u_{k,i}u_{l,l}) + C(u_{l,l})^2\delta_{ik}. \qquad (2.3)$$

Таким образом, нелинейное уравнение упругости имеет следующий вид:

$$\rho u_{i,tt} - \mu u_{i,kk} - (\mu + \lambda)u_{l,li} = F_i, \qquad (2.4)$$

где F_i – нелинейная сила, определяемая нелинейной частью тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ik,k}$

$$F_i = \tilde{\sigma}_{ik,k} = \left(\mu + \frac{A}{4}\right)(u_{l,kk}u_{l,i} + u_{l,kk}u_{i,l} + 2u_{i,lk}u_{l,k}) +$$

$$+\left(\mu+\frac{A}{4}+\lambda+B\right)(u_{l,ik}u_{l,k}+u_{k,lk}u_{i,l})+(\lambda+B)(u_{i,kk}u_{l,l})+$$
$$+\left(\frac{A}{4}+B\right)(u_{k,lk}u_{l,i}+u_{l,ik}u_{k,l})+(B+2C)(u_{k,ik}u_{l,l}). \tag{2.5}$$

Предполагаем, что

$$\vec{u}=\epsilon\mathrm{grad}\varphi+\epsilon^2\mathrm{grad}\varphi''+\epsilon\mathrm{rot}\vec{\psi}+\epsilon^2\mathrm{rot}\vec{\psi}'', \tag{2.6}$$

где φ и $\vec{\psi}$ – скалярный и векторный потенциалы, и пытаемся построить аналогичное разложение для выражения (2.5). В дальнейшем будем использовать упругие константы, нормированные на плотность среды $\rho(\mu\to\mu/\rho,\ \lambda\to\lambda/\rho,\ A\to A/\rho,\ B\to B/\rho,\ C\to C/\rho)$.

3. Специальный случай. Рассматриваем решения, которые имеют в линейном приближении следующую форму

$$u_1=\psi_{,2},\ u_2=-\psi_{,1},\ u_3=0, \tag{3.1}$$

где

$$\psi=\epsilon X(x_1,x_2)\sin(Kx_3-\omega t). \tag{3.2}$$

Такая деформация $\vec{u}$ удовлетворяет линейной версии уравнения упругости (2.4), если и только если функция $X(x_1,x_2)$ есть решение уравнения Гельмгольца

$$X_{,11}+X_{,22}+kX=0,\ \ k=\omega^2/\mu-K^2 \tag{3.3}$$

или отличается от такого решения на константу. Если

$$X(x_1,x_2)=X\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}=r\right), \tag{3.4}$$

получаем крутильную волну в стержне. Подставляя (3.4) в (3.3), имеем следующее уравнение для $X(r)$:

$$X''+\frac{1}{r}X'+kX=0,\ \ k=\omega^2/\mu-K^2. \tag{3.5}$$

Его решение (регулярное в нуле) – функция Бесселя

$$X(r)=J_0(kr). \tag{3.6}$$

Тогда компоненты смещения в цилиндрических координатах:

$$u_\theta=aJ_1(kr)\sin(Kz-\omega t),\ u_r=0,\ u_z=0. \tag{3.7}$$

4. Вычисление нелинейных членов. Подставляя (3.1)-(3.2) в (2.5), имеем:

$$F_1 = \tilde{C}_1(x_1,x_2) + C_1(x_1,x_2)\cos(2Kz - 2\omega t),$$
$$F_2 = \tilde{C}_2(x_1,x_2) + C_2(x_1,x_2)\cos(2Kz - 2\omega t),$$
$$F_3 = \tilde{C}_3(x_1,x_2) + C_3(x_1,x_2)\sin(2Kz - 2\omega t), \tag{4.1}$$

где $\tilde{C}_i(x_1,x_2)$ и $C_i(x_1,x_2)$ есть линейные комбинации от

$$XX_{,1},\ X_{,2}X_{,12},\ X_{,1}X_{,11},\ X_{,12}X_{,112},\ XX_{,111},\ X_{,11}X_{,111} \tag{4.2}$$

с числовыми коэффициентами:

$$C^{0010}XX_{,1} + C^{0111}X_{,2}X_{,12} + C^{1020}X_{,1}X_{,11} + C^{1121}X_{,12}X_{,112} +$$
$$+ C^{0030}XX_{,111} + C^{2030}X_{,11}X_{,111}. \tag{4.3}$$

(Эти коэффициенты могут быть явно вычислены в терминах μ, λ, A, B, K и ω. Они не зависят от C.) Мы хотим представить F_i в форме

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\varphi^F + \mathrm{rot}\vec{\psi}^F. \tag{4.4}$$

Потенциал $\varphi^F(x_1,x_2,x_3)$ может быть найден, используя следующее условие

$$\partial_{x_1}(F_1 - \varphi^F_{x_1}) + \partial_{x_2}(F_2 - \varphi^F_{x_2}) + \partial_{x_3}(F_3 - \varphi^F_{x_3}) = 0. \tag{4.5}$$

Естественно, имеем

$$\varphi^F = \varphi^F_0 + \varphi^F_2\cos(2Kz - 2\omega t). \tag{4.6}$$

Предположим, что имеется функция $Q(x_1,x_2)$, удовлетворяющая условию

$$Q_{,11} + Q_{,22} - 4K^2Q + X^2 = 0. \tag{4.7}$$

Тогда вычисления дают выражения

$$\varphi^F_0 = \frac{1}{16\mu^2}(K^2\mu - \omega^2)(K^2\mu(A + 4B + 4\lambda + 4\mu) - 2(A + 2B + 2\lambda + 4\mu)\omega^2)X^2 +$$
$$+ \frac{1}{16}K^2(A + 4B + 4\lambda + 4\mu)(X^2_{,1} + X^2_{,2}) +$$

$$+\frac{1}{2\mu}(K^2\mu-\omega^2)(A+2B+\lambda+3\mu)XX_{,11}+\frac{1}{2}(A+2B+\lambda+3\mu)(X_{,11}^2+X_{,12}^2), \qquad (4.8)$$

$$\varphi_2^F=\frac{K^2(A+4\mu)\omega^4}{2\mu^2}Q(x_1,x_2)-$$

$$-\frac{1}{16\mu^2}(K^4\mu^2(A+4B+4\lambda+4\mu)-K^2\mu(A+8B+8\lambda+4\mu)\omega^2+2(A+2B+2\lambda+4\mu)\omega^4)X^2+$$

$$+\frac{K^2}{16}(A+4B+4\lambda+4\mu)(X_{,1}^2+X_{,2}^2)+$$

$$+\frac{1}{2}(K^2-\omega^2/\mu)(A+2B+\lambda+3\mu)XX_{,11}-\frac{1}{2}(A+2B+\lambda+3\mu)(X_{,12}^2+X_{,11}^2), \qquad (4.9)$$

которые определяют потенциал φ^F, удовлетворяющий (4.5). Без потери общности мы можем предположить, что векторный потенциал $\vec{\psi}^F$ имеет следующую форму

$$\vec{\psi}^F=(\psi_1^F(x_1,x_2)\sin(2Kx_3-2\omega t),\ \psi_2^F(x_1,x_2)\sin(2Kx_3-2\omega t),0). \qquad (4.10)$$

Поэтому мы имеем

$$F_1\ \varphi_{,1}^F=2K\psi_2^F\cos(2Kx_3-2\omega t),$$

$$F_2-\varphi_{,2}^F=2K\psi_1^F\cos(2Kx_3-2\omega t),$$

$$F_3-\varphi_{,3}^F=(\psi_{2,1}^F-\psi_{1,2}^F)\sin(2Kx_3-2\omega t). \qquad (4.11)$$

Следовательно

$$\psi_1^F=\frac{K(A+4\mu)}{4}\left(-\frac{\omega^4}{\mu^2}Q_{,2}+\frac{\omega^2}{2\mu}XX_{,2}+X_{,1}X_{,12}-X_{,2}X_{,11}\right), \qquad (4.12)$$

$$\psi_2^F=\frac{K(A+4\mu)}{4}\left(\frac{\omega^4}{\mu^2}Q_{,1}+\frac{\omega^2(2K^2\mu-3\omega^2)}{2\mu}XX_{,1}-X_{,2}X_{,12}-X_{,1}X_{,11}\right). \qquad (4.13)$$

5. *P-волны.* Продольные волны (P-волны) определяются безвихревой частью формулы (2.6). Потенциал φ'' удовлетворяет уравнению

$$(\lambda+2\mu)(\varphi_{,11}''+\varphi_{,22}''+\varphi_{,33}'')-\varphi_{,tt}''+\varphi^F=0. \qquad (5.1)$$

Предполагаем, что $\varphi''=f_0(x_1,x_2)+f_2(x_1,x_2)\cos(2Kx_3-2\omega t)$ и имеем следующие уравнения для f_0 и f_2:

$$(\lambda+2\mu)(f_{0,11}+f_{0,22})+\varphi_0^F=0, \qquad (5.2)$$

$$(\lambda + 2\mu)(f_{2,11} + f_{2,22} - 4K^2 f_2) + \varphi_2^F = 0. \tag{5.3}$$

Стационарное решение. Предположим, что $Q_0(x_1, x_2)$ есть решение уравнения

$$Y_{,11} + Y_{,22} + X^2 = 0. \tag{5.4}$$

Тогда может быть проверено, что выражение

$$S = \frac{(-3A\mu - 4B\mu - 8\mu^2)K^2 + (4A + 8B + 4\lambda + 12\mu)\omega^2}{32\mu(\lambda + 2\mu)} X^2 +$$

$$+ \frac{A + 2B + \lambda + 3\mu}{8(\lambda + 2\mu)} (X_{,1}^2 + X_{,2}^2) +$$

$$+ \frac{(-3A\mu - 4B\mu - 8\mu^2)K^2 + (4A + 8B + 4\lambda + 12\mu)\omega^2}{32\mu(\lambda + 2\mu)} Q_0 \tag{5.5}$$

дает частное решение уравнения (5.2).

Предположим, что все рассматриваемые функции зависят только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и обозначим $J_0(kr)$ через J. Тогда уравнение (5.4) принимает форму

$$Y_{rr} + \frac{1}{r} Y_r + J^2 = 0 \tag{5.6}$$

и выражение

$$Q_0^P = -\frac{1}{2} r^2 J^2 - \frac{r}{2k} J J' - \frac{r^2}{2k} J'^2 \tag{5.7}$$

является его частным решением. Выражение S принимает форму

$$S^P(r) = \frac{(-3A\mu - 4B\mu - 8\mu^2)K^2 + (4A + 8B + 4\lambda + 12\mu)\omega^2}{32\mu(\lambda + 2\mu)} J^2 +$$

$$+ \frac{A + 2B + \lambda + 3\mu}{8(\lambda + 2\mu)} J'^2 +$$

$$+ \frac{(-3A\mu - 4B\mu - 8\mu^2)K^2 + (4A + 8B + 4\lambda + 12\mu)\omega^2}{32\mu(\lambda + 2\mu)} Q_0^P. \tag{5.8}$$

Выражения для деформаций, связанных с потенциалом стоячей волны f_0, в декартовых (x_1, x_2) и полярных (r, θ) координатах имеют вид:

$$u_1 = S_{,1}^P,\ u_2 = S_{,2}^P \text{ и } u_r = S_{,r}^P,\ u_0 = 0, \tag{5.9}$$

соответственно.

Периодическое решение. Предположим, что $Q_2(x_1, x_2)$ есть решение уравнения

$$Y_{,11} + Y_{,22} + \frac{\omega^2 - K^2(\lambda+2\mu)}{2(\lambda+2\mu)} Y + X^2 = 0. \tag{5.10}$$

Тогда может быть проверено, что выражение

$$\frac{(3A+4B+8\mu)K^2\mu(\lambda+2\mu) + 4\lambda(A+2B+\lambda+3\mu)\omega^2}{32\mu(\lambda+2\mu)^2}X^2 +$$

$$+\frac{A+2B+\lambda+3\mu}{8(\lambda+2\mu)}(X_{,1}^2 + X_{,2}^2) + \frac{(A+4\mu)K^2\omega^2}{8\mu^2}Q_2 \tag{5.11}$$

дает частное решение уравнения (5.3). Предположим, что все рассматриваемые функции зависят только от $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тогда уравнение (5.3) принимает форму

$$Y_{rr} + \frac{1}{r}Y_r + \frac{4(\omega^2 - K^2(\lambda+2\mu))}{8(\lambda+2\mu)}Y + J^2 = 0 \tag{5.12}$$

и, поэтому $Q_2(r)$ должно быть частным решением этого неоднородного уравнения Бесселевого типа.

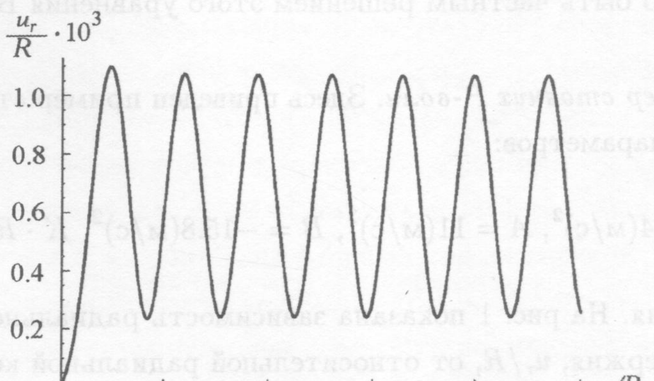

Рис. 1. *Распределение радиальных деформаций по радиусу.*

6. S-волны. Поперечные волны (S-волны) определяются соленоидальной частью разложения (2.6). Уравнение для $\vec{\psi}''$ имеет вид

$$\mu(\vec{\psi}''_{,11} + \vec{\psi}''_{,22} + \vec{\psi}''_{,33}) - \vec{\psi}''_{,tt} + \vec{\psi}^F = 0. \tag{6.1}$$

Мы предполагаем, что $\vec{\psi}''= (a_1(x_1,x_2)\sin(2Kx_3-2\omega t), a_2(x_1,x_2)\sin(2Kx_3-2\omega t), 0)$ и имеем следующие уравнения для $a_1(x_1,x_2)$ и $a_2(x_1,x_2)$:

$$\mu(a_{1,11}+a_{1,22})-4(K^2\mu-\omega^2)a_1+\psi_1^F=0, \tag{6.2}$$

$$\mu(a_{2,11}+a_{2,22})-4(K^2\mu-\omega^2)a_2+\psi_2^F=0. \tag{6.3}$$

Тогда может быть проверено, что выражения

$$a_1^*(x_1,x_2)=\frac{(A+4\mu)K}{8\mu}XX_{,2}-\frac{(A+4\mu)K\omega^2}{16\mu^2}Q_{,2}, \tag{6.4}$$

$$a_2^*(x_1,x_2)=\frac{(A+4\mu)K}{8\mu}XX_{,1}+\frac{(A+4\mu)K\omega^2}{16\mu^2}Q_{,1} \tag{6.5}$$

дают частные решения уравнений (6.2) и (6.3). Предположим, что все рассматриваемые функции зависят только от $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Тогда уравнение (4.7) для $Q(r)$ принимает вид

$$Y_{rr}+\frac{1}{r}Y_r+K^2Y+J^2=0 \tag{6.6}$$

и поэтому $Q(r)$ должно быть частным решением этого уравнения Бесселевого типа.

7. *Численный пример стоячих P-волн.* Здесь приведен пример стоячей P-волны для следующих значений параметров:

$$\lambda=11.6(\text{м/с})^2,\ \mu=8.4(\text{м/с})^2,\ A=11(\text{м/с})^2,\ B=-15.8(\text{м/с})^2,\ K\cdot R=1720,\ \omega=2c^{-1},$$

где R – радиус стержня. На рис. 1 показана зависимость радиальной деформации, отнесенной к радиусу стержня, u_r/R, от относительной радиальной координаты r/R.

8. *Заключение.* Мы построили решение нелинейного уравнения теории упругости, линеаризация которого дает описание классических крутильных волн в стержне с круговым сечением. Построенное решение распадается на стоячую волну и бегущую волну. Стоячая волна описывается явным квадратичным выражением от функций Бесселя. Ее наличие означает постоянную радиальную деформацию стержня, подверженного крутильным колебаниям. Описание бегущей волны включает квадратуры от кубических выражений от функций Бесселя.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости* (М., Наука, 1987).

[2] A. E. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed.* (Dober Publ., New York, 1944); А. Ляв, *Математическая теория упругости* (М., ОМТИ, 1935).

[3] J. W. S. Rayleigh, *Theory of Sound* (McMillan, London, 1929); Дж. С. Рэлей, *Теория звука* (М., ГИТТЛ, 1955).

[4] К. А. Наугольных, Л. А. Островский, *Нелинейные волновые процессы в акустике* (М., Наука, 1990).

[5] В. А. Красильников, В. В. Крылов, *Введение в физическую акустику* (М., Наука, 1984).

[6] A. Shermenev and M. Shermeneva, Phys. Rev. E **61**(5), 6000 (2000).

[7] A. M. Shermenev, Journal of Physics A **37**, 1 (2004).

Учреждение Российской
академии наук
Институт общей физики
им. А.М. Прохорова

Поступила в редакцию 17 декабря 2008 г.