

УДК 533.9

КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЧЕРЕНКОВСКОЙ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев

Изложена квантовая теория черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка в изотропной плазме. Получены релятивистские квантовые нелинейные уравнения черенковской пучково-плазменной неустойчивости. В линейном приближении выведено релятивистское квантовое дисперсионное уравнение и в предельных случаях определены инкременты развития неустойчивости.

В работе [1] развита квантовая теория резонансной черенковской неустойчивости нерелятивистского электронного пучка малой плотности в плотной плазме. Показано, что в зависимости от плотности пучка имеются два режима неустойчивости. При умеренной плотности пучка неустойчивость развивается в обычном классическом режиме одночастичного вынужденного эффекта Черенкова. При очень малой плотности появляется новый, чисто квантовый, режим неустойчивости. Кроме того, в коротковолновой области имеется еще одна квантовая неустойчивость, классический аналог которой отсутствует. Квантовые пучковые неустойчивости аналогичны коллективному вынужденному эффекту Черенкова [2] или неустойчивостям в условиях аномального эффекта Доплера. В настоящей работе проводится обобщение результатов работы [1] на релятивистский случай.

Для квантового описания неустойчивости релятивистского электронного пучка в плазме используем следующие уравнения для волновой функции электронов пучка $\psi(t, z)$, скалярного потенциала $\varphi(t, z)$ и возмущения плотности электронов плазмы $\rho_p(t, z)$:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + m^2 c^4 \psi = -2ie\hbar \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\pi \rho_p = -4\pi \rho_e, \quad (1)$$

$$\rho_e = i \frac{e\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{e^2}{mc^2} \psi \psi^* \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_p}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Здесь ρ_e – плотность заряда электронов пучка, а ω_p – ленгмюровская частота электронов плазмы (плазма описывается гидродинамически и в линейном приближении). Первое уравнение в системе (1) есть уравнение Клейна–Гордона–Фока, линеаризованное по скалярному потенциалу [3]. Поскольку в невозмущенном состоянии электронный пучок является моноимпульсным, невозмущенную волновую функцию электрона пучка можно определить выражениями

$$\psi(t, z) = A \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \quad k_0 = \frac{mu\gamma}{\hbar}, \quad \omega_0 = \sqrt{k_0^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}} = \frac{mc^2 \gamma}{\hbar}, \quad (2)$$

где u – скорость пучка, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электрона пучка, а нормировочный множитель у волновой функции (2) есть $A = n_{0e}^{1/2} \gamma^{-1/2}$. Волновая функция (2) является одним из начальных условий для уравнения Клейна–Гордона–Фока.

Следуя работе [1], для потенциала и возмущенной волновой функции используем следующие представления:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}(t) \exp(ikz) + \tilde{\varphi}^*(t) \exp(-ikz)), \quad (3a)$$

$$\psi = A_0(t) \exp(ik_0 z) + A_-(t) \exp[i(k_0 - k)z] + A_+(t) \exp[i(k_0 + k)z]. \quad (3b)$$

Подставляя выражения (3) в уравнения (1) и полагая функции $\exp(ikz)$, $\exp(ik_0 z)$ и $\exp[i(k_0 \mp k)z]$ ортогональными на некотором пространственном периоде L ($L \rightarrow \infty$), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 A_0}{dt^2} + \omega_0^2 A_0 = -i \frac{e}{\hbar} \left((\tilde{\varphi} \dot{A}_- + \tilde{\varphi}^* \dot{A}_+) + \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\varphi}} A_- + \dot{\tilde{\varphi}}^* A_+) \right),$$

$$\frac{d^2 A_-}{dt^2} + \omega_-^2 A_- = -i \frac{e}{\hbar} \left(\dot{A}_0 \tilde{\varphi}^* + \frac{1}{2} A_0 \dot{\tilde{\varphi}}^* \right),$$

$$\frac{d^2 A_+}{dt^2} + \omega_+^2 A_+ = -i \frac{e}{\hbar} \left(\dot{A}_0 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} A_0 \dot{\tilde{\varphi}} \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 k^2 \tilde{\varphi} - \rho + \frac{4\pi e^2}{mc^2} n_{0e} \gamma^{-1} (A_0 A_0^* + A_- A_-^* + A_+ A_+^*) \tilde{\varphi} = \\
 = i \frac{4\pi e \hbar}{mc^2} n_{0e} \gamma^{-1} ((\dot{A}_0 A_-^* - A_0 \dot{A}_-^*) - (\dot{A}_0^* A_+ - A_0^* \dot{A}_+)), \\
 \frac{d^2 \rho}{dt^2} = -\omega_p^2 k^2 \tilde{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\omega_{\mp} = \sqrt{(k_0 \mp k)^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}}. \quad (5)$$

Уравнения (4) описывают нелинейную динамику релятивистской квантовой пучковой неустойчивости в плазме. Мы же здесь ограничимся только линейным приближением.

В линейном приближении правая часть первого уравнения системы (4) обращается в ноль. Поэтому, с учетом (2), имеем $A_0(t) = A \exp(-i\omega_0 t)$. Полагая $\tilde{\varphi} \sim \exp(-i\omega t)$, из второго и третьего уравнений системы (4) видим, что $A_{\mp}(t) \sim \exp[-i(\omega_0 \mp \omega)t]$. При этом из линеаризованных уравнений (4) получается следующее дисперсионное уравнение для частоты ω пучково-плазменной системы:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_e^2 \gamma^{-1}}{k^2 c^2} = 2 \frac{\omega_e^2 \gamma^{-1}}{k^2 c^2} \left[\frac{(\omega_0 - \omega/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 - \omega_-^2} + \frac{(\omega_0 + \omega/2)^2}{(\omega + \omega_0)^2 - \omega_+^2} \right]. \quad (6)$$

Учитывая далее соотношения

$$\begin{aligned}
 (\omega - \omega_0)^2 - \omega_-^2 &= (\omega^2 - k^2 c^2) - 2\omega_0(\omega - ku), \\
 (\omega + \omega_0)^2 - \omega_+^2 &= (\omega^2 - k^2 c^2) + 2\omega_0(\omega - ku),
 \end{aligned} \quad (7)$$

преобразуем дисперсионное уравнение (6) к виду

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2 \gamma^{-1} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)}{4m^2 c^4 \gamma^2} \right)}{(\omega - ku)^2 - (\omega^2 - k^2 c^2) \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)}{4m^2 c^4 \gamma^2}} = 0. \quad (8)$$

В нерелятивистском пределе ($u^2 \ll c^2$, $\omega^2 \ll k^2 c^2$) дисперсионное уравнение (8) переходит в дисперсионное уравнение, полученное и исследованное в работе [1], а в классическом пределе из (8) получается известное дисперсионное уравнение неустойчивости релятивистского электронного пучка в плазме [4].

В одночастичном пределе $\omega_e \rightarrow 0$ из (8) находим релятивистские квантовые условия черенковского резонанса между электроном и продольной волной

$$(\omega - ku)^2 - \frac{\hbar^2 (\omega^2 - k^2 c^2)^2}{4m^2 c^4 \gamma^2} = 0 \rightarrow \omega = ku \pm (\omega^2 - k^2 c^2) \frac{\hbar}{2mc^2 \gamma}. \quad (9)$$

Если квантовый член в (9) мал, то, полагая в нем $\omega = ku$, запишем следующие условия:

$$\omega = ku \mp \frac{\hbar k^2}{2m\gamma^3}, \quad (10)$$

обобщающие классическое условие черенковского резонанса $\omega = ku$ на квантовый релятивистский случай.

Подставляя в условия (9) частоту плазменной волны $\omega = \omega_p$, определяем точки одностичного черенковского резонанса пучка с плазменной волной

$$k_{1,2} = \frac{mu\gamma}{\hbar} \mp \sqrt{\left(\frac{mu\gamma}{\hbar} - \frac{\omega_p}{u}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{u^2\gamma^2}}, \quad (11)$$

$$k_{3,4} = -\frac{mu\gamma}{\hbar} \pm \sqrt{\left(\frac{mu\gamma}{\hbar} + \frac{\omega_p}{u}\right)^2 - \frac{\omega_p^2}{u^2\gamma^2}}.$$

Линии черенковских резонансов (9) и возможные расположения резонансных точек (11) на плоскости (ω, k) показаны на рис. 1 – точки 1-4. Горизонтальными прямыми “p” показаны линии $\omega = \pm\omega_p$ при умеренной плотности плазмы, а горизонтальные прямые “s” изображают линии $\omega = \pm\omega_p$ в случае плазмы большой плотности.

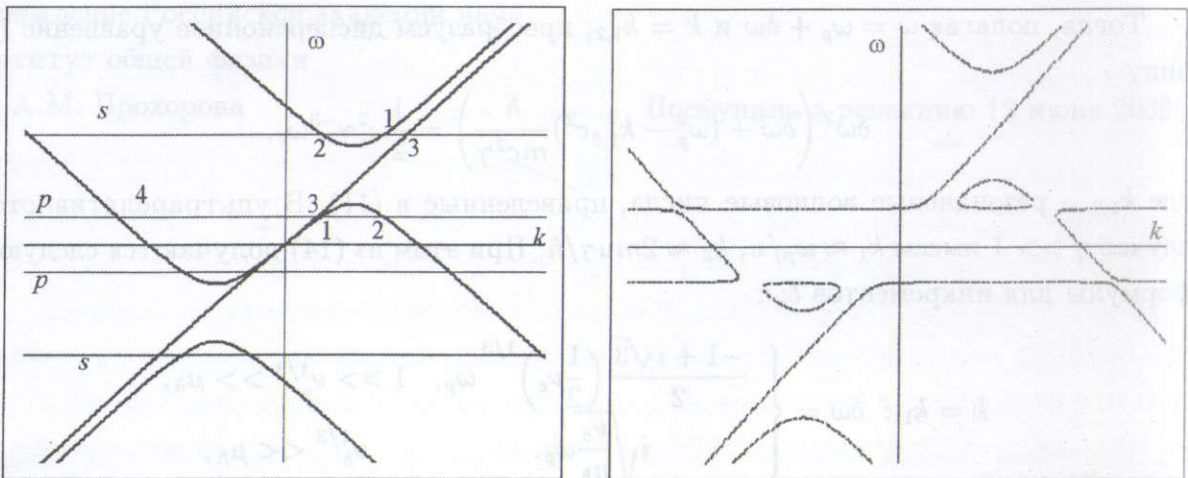


Рис. 1. Линии черенковского резонанса и резонансные точки в релятивистской квантовой теории.

Рис. 2. Дисперсионные кривые при релятивистском пучково-плазменном взаимодействии.

Анализ дисперсионного уравнения (8) показывает, что неустойчивость пучка малой плотности в плазме имеется только в окрестностях резонансных точек $k_{1,2}$ (как и в нерелятивистском случае, см. [1]), причем только при умеренной плотности плазмы, а именно:

$$\hbar\omega_p < mc^2(\gamma - 1). \quad (12)$$

Условие (12) обобщает полученное в работе [1] условие черенковской пучково-плазменной неустойчивости на релятивистский случай. Физический смысл неравенства (12) в том, что при излучении плазмона электрон теряет энергию $\hbar\omega_p$. Но это возможно, только если энергия плазмона меньше кинетической энергии электрона. Таким образом, неравенство (12) является принципиальным квантовым порогом по энергии электрона для развития черенковской пучковой неустойчивости в плазме. При выполнении условия (12) расположение резонансных точек на плоскости (ω, k) такое, как показано на рис. 1 в случае, когда линии $\omega = \pm\omega_p$ изображаются прямыми "р". Полная картина дисперсионных кривых, построенных по уравнению (8) при выполнении неравенства (12), представлена на рис. 2. Области неустойчивости на этом рисунке как раз приходятся на окрестности точек $k_{1,2}$.

Для вычисления инкрементов предположим, что выполнены неравенства

$$\omega_b^2\gamma^{-3} \ll \omega_p^2, \quad \hbar\omega_p \ll mc^2(\gamma - 1). \quad (13)$$

Тогда, полагая $\omega = \omega_p + \delta\omega$ и $k = k_{1,2}$, преобразуем дисперсионное уравнение (8) к виду

$$\delta\omega^2 \left(\delta\omega + (\omega_p^2 - k_{1,2}^2 c^2) \frac{\hbar}{mc^2\gamma} \right) = \frac{1}{2} \omega_e^2 \gamma^{-3} \omega_p, \quad (14)$$

где $k_{1,2}$ – резонансные волновые числа, приведенные в (11). В ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ имеем $k_1 \approx \omega_p/u$, $k_2 \approx 2m\gamma/\hbar$. При этом из (14) получаются следующие формулы для инкрементов $\delta\omega$:

$$k = k_1 : \delta\omega = \begin{cases} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \nu_e \right)^{1/3} \omega_p, & 1 \gg \nu_e^{1/3} \gg \mu_{\hbar}, \\ i\sqrt{\frac{\nu_e}{\mu_{\hbar}}} \omega_p, & \nu_b^{1/3} \ll \mu_{\hbar}, \end{cases} \quad (15)$$

$$k = k_2 : \delta\omega = i\frac{1}{4}\gamma\sqrt{\mu_{\hbar}\nu_e}\omega_p,$$

где

$$\nu_e = \frac{\omega_e^2\gamma^{-3}}{\omega_p^2}, \quad \mu_{\hbar} = \frac{2\hbar\omega_p}{m u^2 \gamma^3}. \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) обобщают соответствующие формулы работы [1] на релятивистский случай. Два инкремента из приведенных в (15) очевидно являются чисто квантовыми. При $\hbar \rightarrow 0$ второй инкремент переходит в первый, а третий – обращается в ноль. Первый инкремент в (15) совпадает с известным классическим инкрементом обычной резонансной черенковской неустойчивости релятивистского пучка в плазме. Заметим, что в случае, когда инкремент неустойчивости определяется второй формулой (15), т.е. выполнено неравенство $\nu_b^{1/3} \ll \mu\hbar$, топология дисперсионных кривых не соответствует тому, что изображено на рис. 2.

Автор благодарит А.А. Рухадзе за сделанные им при обсуждении работы ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. В. Кузелев, Краткие сообщения по физике ФИАН, **36**(8), 13 (2009).
- [2] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **152**(2), 285 (1987).
- [3] А. С. Давыдов, *Квантовая механика* (М., Наука, 1973).
- [4] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (М., Высшая школа, 1988).

Учреждение Российской академии наук

Институт общей физики

им. А.М. Прохорова

Поступила в редакцию 12 июня 2009 г.