

УДК 621.383
ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ШУМ-ФАКТОР СИГНАЛОВ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ФОТОЭЛЕКТРОННЫХ УМНОЖИТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ КРОСС-ТОЛКА

С. Л. Виноградов, Т. Р. Виноградова, В. Э. Шубин, Д. А. Шушаков

Твердотельные фотоэлектронные умножители (ТФЭУ) – новый тип фотодетекторов, использующих лавинный пробой полупроводника в гейгеровском режиме, ограниченном отрицательной обратной связью. В таких условиях лавинный пробой характеризуется высоким коэффициентом умножения $10^4 - 10^6$ и низким шумом, что позволяет детектировать отдельные фотоны. Однако на практике в ТФЭУ каждый первичный пробой может сопровождаться вторичными пробоями за счет процессов кросс-толка, изменяющих вероятностное распределение сигнала и вносящих избыточные шумы. В работе проведен учет влияния кросс-толка на сигнальные и шумовые характеристики ТФЭУ на основе обобщенного распределения Пуассона.

Ключевые слова: твердотельный ФЭУ, распределение импульсов.

Введение. Большинство известных конструкций ТФЭУ (Solid State Photomultiplier, SSPM) представляют собой матрицы лавинных гейгеровских фотодетекторов с общим катодом и анодом, в которых лавинный пробой ограничивается отрицательной обратной связью (ООС). ООС обеспечивает не только гашение гейгеровского пробоя, но и подавление флуктуаций числа носителей заряда в выходном сигнальном пакете. Таким образом ТФЭУ вырабатывают калибранные выходные сигналы – одноэлектронные импульсы, вызванные умножением одного фотоэлектрона или темнового электрона в

каждом из элементов или пикселей матрицы. Основные представления о роли и механизмах ООС в обеспечении уникальных свойств надкритического лавинного режима работы лавинных фотоприемных структур, а также принципиальные подходы к созданию ТФЭУ рассмотрены в работах [1–4].

Одна из типичных конструкций ТФЭУ представлена на рис. 1 [5].

В последние годы ТФЭУ получают все более широкое применение в научных исследованиях, ядерной физике, физике высоких энергий, в медицине, биологии и других областях, заменяя вакуумные ФЭУ и традиционные лавинные фотодиоды (ЛФД).

Актуальной проблемой регистрации однофотонных и малофотонных сигналов являются случайные процессы вторичного (ложного) срабатывания пикселей ТФЭУ, инициированные первичным (истинным) сигналом, а именно, так называемые эффекты кросс-толка (cross-talk) и афтерпалсинга (afterpulsing). В большинстве конструкций и физических ситуаций кросс-толк – это мгновенное срабатывание соседних пикселей, а афтерпалсинг – того же самого пикселя, но с некоторой задержкой. Далее для обозначения вторичных событий любого происхождения будет использоваться название “дупликации”.

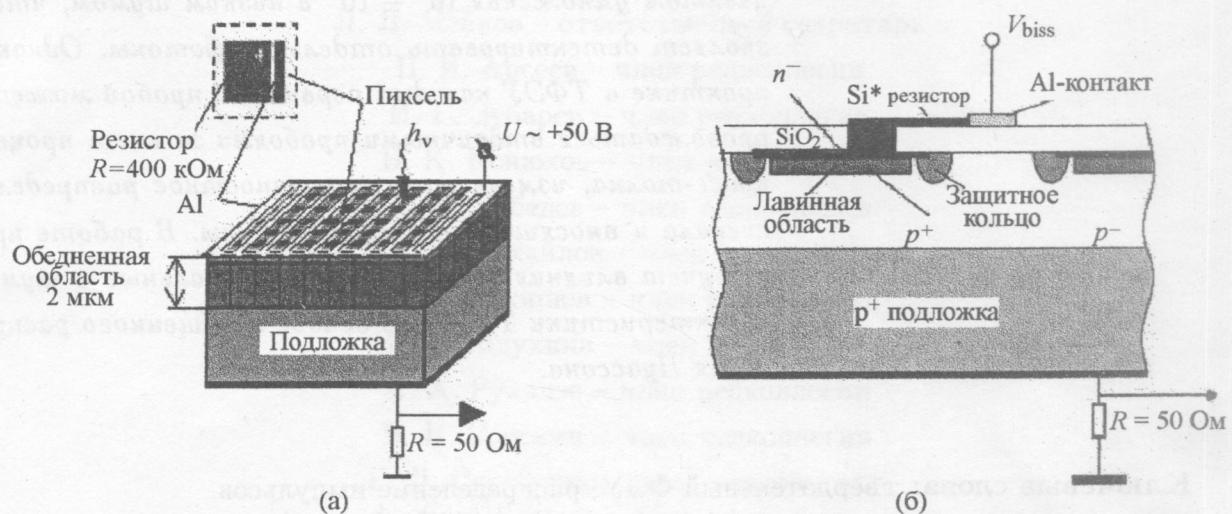


Рис. 1. Конструкция ТФЭУ: (а) общий вид матрицы, (б) один пиксель.

Кросс-толк по сложившимся представлениям вызван излучением видимых и ИК фотонов при термализации горячих электронов в лавине. Вероятность излучения очень мала $\sim 3 \cdot 10^{-5}$ на электрон, но из-за большого коэффициента умножения в лавинном

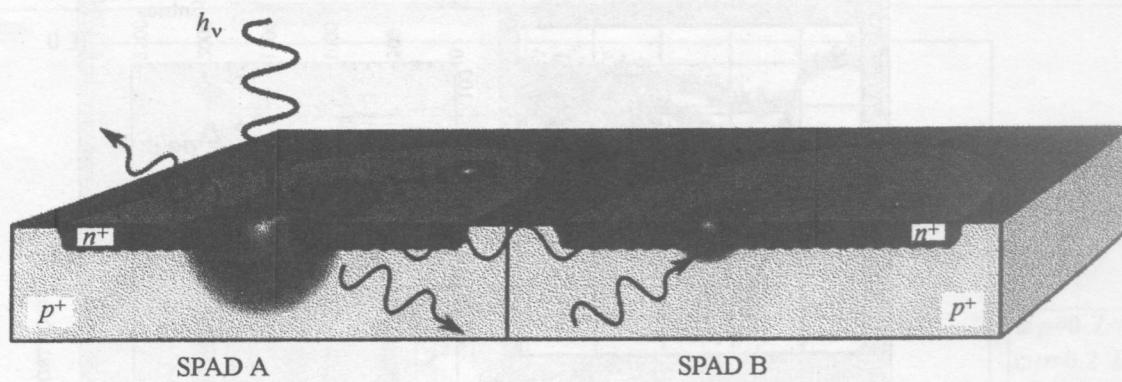


Рис. 2. Схема процессов оптического кросс-толка соседних пикселей – элементов ЛФД матрицы.

процессе может родиться несколько фотонов, которые затем детектируются соседними пикселями. Схема процессов оптического кросс-толка представлена на рис. 2 на примере двух соседних пикселей [6]. В результате выходной импульс, инициированный одним электроном (истинное событие), оказывается дополнен практически одновременным возникновением вторичных импульсов (ложных событий), а вероятностное распределение амплитуд выходного импульса искажено за счет появления событий с двойной амплитудой и более.

В ряде случаев возможна также более сложная ситуация, когда вторичные импульсы, вызванные оптическим кросс-толком, имеют задержку относительно первичных импульсов, т.е. проявляют себя как афтерпалсинг [7].

Случай детектирования нескольких фотонов одновременно (короткий лазерный импульс длительностью около 70 пикосекунд) представлен на рис. 3 [8]. Гистограмма числа импульсов с разной амплитудой (рис. 3 (б)) или, в других аналогичных экспериментах, с разной площадью, отражает функцию плотности вероятности распределения числа зарегистрированных событий, а именно вероятности зарегистрировать на выходе сумму 0, 1, 2 и более одноэлектронных сигналов при освещении фотоприемника коротким малофотонным импульсом с заданным средним числом фотонов (на рис. 3 аппаратный “0” сдвинут на ≈ 95 каналов). Однако из-за кросс-толка часть пиков гистограммы содержат некоторое количество ложных событий. Таким образом, с низким шумом процесса умножения одного электрона (что отражается в малой ширине пиков)

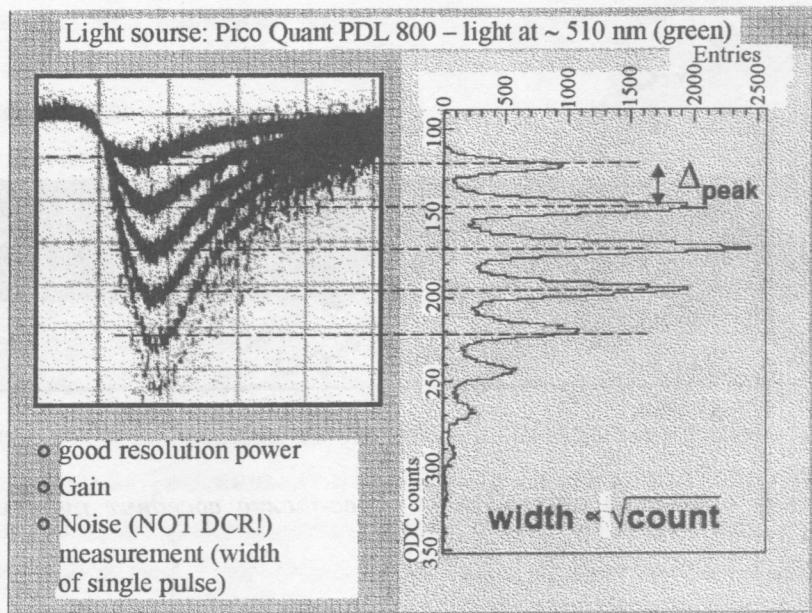


Рис. 3. Регистрация короткого малофотонного импульса: слева – временная диаграмма многократно наложенных импульсов фотоотклика разной амплитуды; справа – гистограмма распределения амплитуды импульсов фотоотклика (аппаратный “0” распределения сдвинут).

сочетается шум случайного процесса рождения ложных импульсов кросс-толка (что отражается в увеличении числа пиков и числа событий большой амплитуды в функции распределения).

Анализ таких гистограмм находится в центре внимания многих исследований ТФЭУ, направленных как на измерение основных фотоприемных характеристик, так и на решение прикладных задач детектирования малофотонных импульсов. В отсутствие кросс-толка число событий в пиках гистограммы определяется распределением Пуассона, и это подтверждается в ряде случаев экспериментальными результатами, однако есть много экспериментов с сильными отклонениями от распределения Пуассона. В ряде работ предприняты попытки найти взаимосвязь функции распределения или формы гистограммы с характеристиками процессов кросс-толка, однако, на наш взгляд, они пока не привели к универсальному аналитическому выражению такой зависимости.

Например, в работе [9] предложена аналитическая формула для Фурье-образа гистограммы, позволяющая построить модельную гистограмму, используя ряд экспери-

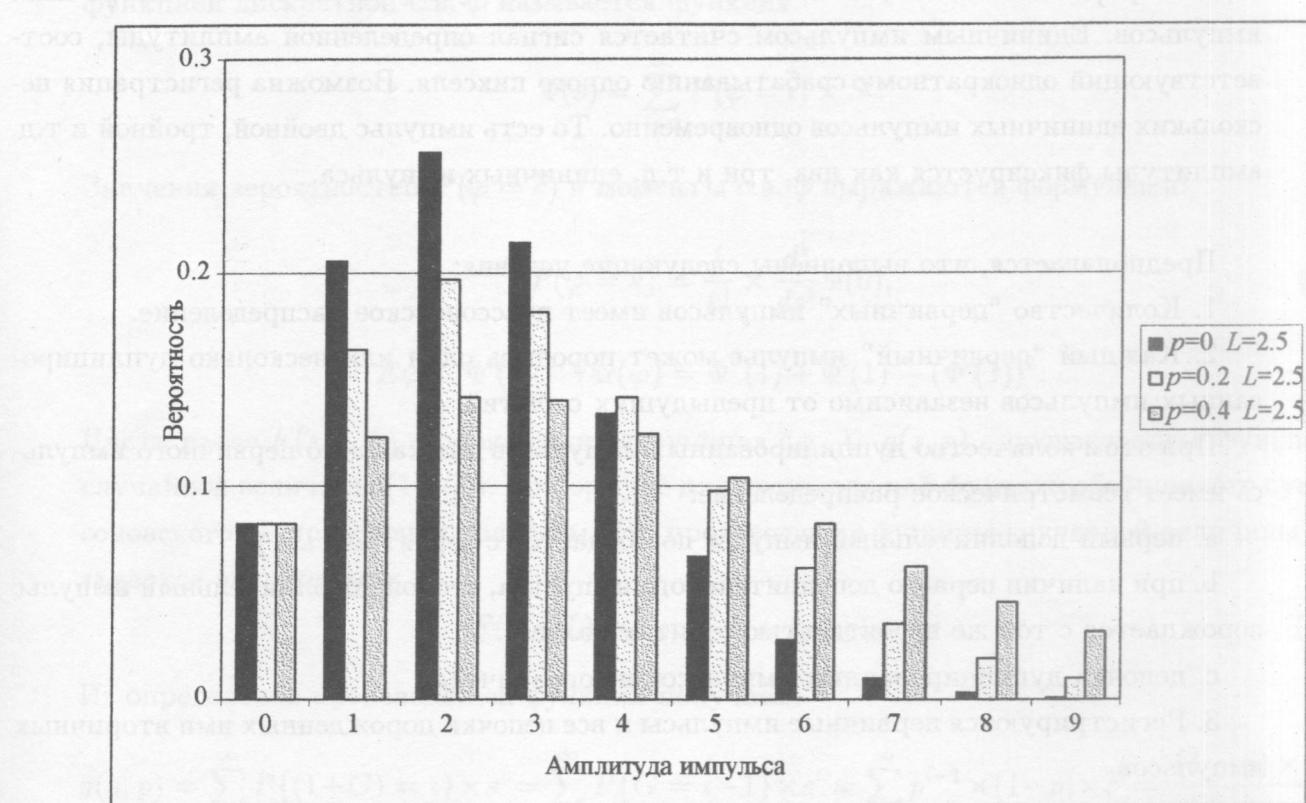


Рис. 4. Функция обобщенного Пуассоновского распределения для среднего числа первичных событий $L = 2.5$ и для различных значений вероятности вторичных событий: $p = 0$ (соответствует обычному Пуассоновскому распределению), 0.2 и 0.4.

ментальных и подгоночных данных. В работе [10] предложен подход приближенного итерационного построения функции распределения, но он применим только для небольшого числа событий или для низких значений вероятности дупликаций (<10% по нашим оценкам). Также рассматривался ряд частных случаев режима счета фотонов с помощью вакуумных ФЭУ, в которых некоторым аналогом кросс-толка является так называемый афтерпэлсинг (возникновение вторичных событий с задержкой относительно первичного), вероятность которого имеет очень низкие значения [11–14]. Для оценки характеристик ТФЭУ часто используют моделирование Монте-Карло [15, 16], однако это не позволяет получить аналитическое описание вероятностных процессов.

Математическая модель вероятностного распределения. Регистрируется количество единичных импульсов во временных воротах. Предполагается, что количество

зарегистрированных импульсов представляет собой сумму первичных и вторичных импульсов. Единичным импульсом считается сигнал определенной амплитуды, соответствующий однократному срабатыванию одного пикселя. Возможна регистрация нескольких единичных импульсов одновременно. То есть импульс двойной, тройной и т.д. амплитуды фиксируется как два, три и т.д. единичных импульса.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1. Количество “первичных” импульсов имеет пуассоновское распределение.

2. Каждый “первичный” импульс может породить один или несколько дуплицированных импульсов независимо от предыдущих событий.

При этом количество дуплицированных импульсов для каждого первичного импульса имеет геометрическое распределение:

а. первый дополнительный импульс порождается с вероятностью p ;

б. при наличии первого дополнительного импульса, второй дополнительный импульс порождается с той же вероятностью p , и так далее;

с. цепочка дуплицированных импульсов не ограничена.

3. Регистрируются первичные импульсы и все цепочки порожденных ими вторичных импульсов.

Таким образом, получаем, что количество зарегистрированных импульсов:

$$X = \sum_{i=1}^N (1 + G_i),$$

где G_i – независимые случайные величины (с.в.) с геометрическим распределением

$$P(G_i = k) = p^k(1 - p) \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots$$

N – с.в., не зависящая от G_i и имеющая пуассоновское распределение с параметром L .

Вычисления. Случайная величина (с.в.) X имеет обобщенное распределение Пуассона. Нас интересует само распределение

$$f_k(p, L) = P(X = k) \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots$$

и его следующие параметры: среднее EX , дисперсия $\text{Var}(X)$. Для их вычисления воспользуемся методом производящих функций согласно гл. XI, XII [17]. Производящей

функцией дискретной с.в. φ называется функция

$$\Phi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\varphi = i) \times S^i.$$

Значения вероятностей $P(\varphi = k)$ и моменты с.в. φ выражаются формулами:

$$P(\varphi = k) = \frac{1}{k!} \times \frac{d^k}{ds^k} \Phi(0), \quad (1)$$

$$E\varphi = \Phi'(1), \quad \text{Var}(\varphi) = \Phi''(1) + \Phi'(1) - (\Phi'(1))^2.$$

Пусть далее $F(s, p, L)$ – производящая функция с.в. X , $g(s, p)$ – производящая функция случайной величины $(1+G_i)$. По формуле для производящей функции обобщенного пуссоновского распределения получаем, что производящая функция случайной величины X задается выражением:

$$F(s, p, L) = \exp(-L + L \times g(s, p)). \quad (2)$$

Из определения производящей функции получаем:

$$g(s, p) = \sum_{i=0}^{\infty} P\{(1+G) = i\} \times s^i = \sum_{i=1}^{\infty} P\{G = i-1\} \times s^i = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} \times (1-p) \times s^i = \frac{(1-p) \times s}{1 - p \times s}.$$

Таким образом,

$$F(s, p, L) = \exp\left(L \frac{s-1}{1 - p \times s}\right). \quad (3)$$

Из формул (1) и (3) получаем значения вероятностей регистрации 0, 1, 2 импульсов (для более высоких значений выражения также получены, но не приведены):

$$f_0(p, L) = \exp(-L),$$

$$f_1(p, L) = \exp(-L) \times L \times (1-p),$$

$$f_2(p, L) = \exp(-L) \times (L \times (1-p) \times p + \frac{1}{2} \times L^2 \times (1-p)^2). \quad (4)$$

Применяя формулы (1), позволяющие вычислить моменты с помощью производящих функций, получаем выражение для среднего и дисперсии числа зарегистрированных импульсов:

$$EX = \frac{L}{(1-p)}, \quad \text{Var}(X) = \frac{L \times (1+p)}{(1-p)^2}. \quad (5)$$

Обозначив среднее число вторичных импульсов, приходящихся на один первичный (среднее геометрического распределения), коэффициентом дупликаций K_{dup} ,

$$K_{\text{dup}} = \frac{p}{1-p},$$

можно представить (5) в виде:

$$EX = L \times (1 + K_{\text{dup}}), \quad \text{Var}(X) = L \times (1 + K_{\text{dup}}) \times (1 + 2K_{\text{dup}}).$$

Графики обобщенного распределения Пуассона. Расчетные функции вероятности обобщенного Пуассоновского распределения по формулам (4), включая более высокие значения амплитуды импульсов (числа зарегистрированных выходных событий), представлены на рис. 4. С ростом вероятности вторичных событий p функция распределения заметным образом уширяется (увеличивается дисперсия) и сдвигается среднее положение пика (увеличивается среднее). Таким образом, дупликации вызывают рост средней амплитуды выходного сигнала и увеличение разброса значений амплитуд от среднего, т.е. рост шума.

Определение параметров обобщенного распределения. Полученные аналитические выражения для зависимости функции распределения от вероятности рождения вторичного импульса p и от среднего числа первичных событий L позволяют легко определить оба параметра обобщенного распределения из экспериментальной гистограммы:

$$L = -\ln(f_0),$$

$$p = 1 + \frac{f_1}{f_0 \times \ln(f_0)}.$$

При таком подходе важнейшая характеристика фотодетектора – квантовая эффективность (в данном случае правильнее говорить о вероятности детектирования единичного фотона) – без искажений определяется из известной величины L при известном среднем числе фотонов в импульсе. Интересно отметить, что для определения вероятности кросс-толка p достаточно знать экспериментальные значения числа событий в нулевом и первом пиках гистограммы (не требуется знание среднего числа фотонов в импульсе). Точность оценки L и p может быть в дальнейшем повышена на основе аналитических выражений для вероятностей с большими амплитудами – двойными и выше в развитие формул (4).

Шум-фактор процессов кросс-толка. Известно, что ЛФД классического типа обладают высокими шумами умножения, т.е. большой дисперсией числа умноженных электронов в выходных импульсах. В ТФЭУ, благодаря сильной отрицательной обратной связи, шумы процесса умножения на порядки меньше и ими практически можно пренебречь. Однако было бы правильным сделать сопоставимое сравнение шумов кросс-толка в ТФЭУ и шумов умножения ЛФД и вакуумных ФЭУ.

В качестве основной характеристики избыточного шума детектирования, порождаемого самим приемником, используют шум-фактор (excess noise factor, ENF). Шум-фактор определяется как величина, показывающая насколько изменилось отношение в квадратурах сигнала к шуму (Signal to Noise Ratio, SNR) на выходе прибора по отношению к входу за счет внутренних процессов в детекторе

$$ENF = \frac{SNR_{in}^2}{SNR_{out}^2}.$$

В нашем случае сигналом на входе можно считать среднее число первичных умноженных электронов, а шумом – его среднеквадратичное отклонение, а на выходе – тоже для числа одноэлектронных импульсов. Считая, что число фотонов во входном сигнале подчиняется распределению Пуассона, и используя полученный результат (5) для выходных сигналов, получаем:

$$SNR_{in} = \frac{L}{\sqrt{L}} = \sqrt{L},$$

$$SNR_{out} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{1+p}}.$$

Таким образом, шум-фактор процессов кросс-толка имеет весьма простой вид:

$$ENF = 1 + p.$$

Очевидно, что в сравнении с ЛФД, типичные значения шум-факторов для которых лежат в диапазоне от 2 до 10, ТФЭУ практически всегда будут предпочтительнее, поскольку для них шум-фактор умножения пренебрежимо мал (1.01–1.05), а шум-фактор кросс-толка ограничен по максимуму значением 2. Значения шум-фактора вакуумных ФЭУ с усилителем-дискриминатором лежат в диапазоне от 1.2 до 1.3, поэтому преимущества ТФЭУ за счет низких шумов умножения будут проявляться при значениях вероятности рождения вторичных импульсов <20%–30%.

Обсуждение. С точки зрения применимости полученных результатов к реальным условиям работы фотоприемника необходимо, чтобы в выходном сигнале содержались только первичные события и все порожденные ими цепочки дупликаций, не более и не менее. Это достаточно просто реализуется при регистрации коротких (по критерию ширины одноэлектронного импульса ТФЭУ) лазерных импульсов в синхронных временных воротах при условии низкого темнового счета (по критерию среднего числа событий в воротах). То есть нужно исключить ситуацию, когда во временные ворота попадают “чужие” вторичные импульсы и не попадают “свои”. Если такие условия выполняются в узких воротах (немного больше ширины одноэлектронного импульса, но много меньше характерного времени задержки импульсов афтерпалсинга), то полученный результат относится только к эффекту кросс-толка. Однако если ширина ворот будет много больше времен задержки афтерпалсинга, то вместо вероятности кросс-толка будет фигурировать суммарная вероятность дупликаций: кросс-толка и афтерпалсинга. В подобных условиях широких временных ворот могут быть получены корректные результаты и при регистрации полного числа одноэлектронных событий для стационарных темновых или световых Пуассоновских потоков.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Б. Кравченко, А. Ф. Плотников, В. Э. Шубин, Квантовая электроника **5**(9), 1918 (1978).
- [2] S. V. Bogdanov, A. B. Kravchenko, A. F. Plotnikov, and V. E. Shubin, Physica Status Solidi (a) **93**, 361 (1986).
- [3] Dmitry A. Shushakov and Vitaly E. Shubin, in Proc. SPIE **2397**, 544 (1995).
- [4] В. Э. Шубин, Д. А. Шушаков, Краткие сообщения по физике ФИАН, №. 2, (2000).
- [5] B. Dolgoshein, P. Buzhan, A. Ilyin, et al., “An advanced Study of Silicon Photomultiplier,” 2001 ICFA: <http://www.slac.stanford.edu/pubs/icfa/>
- [6] A. Lacaita, F. Zappa, S. Bigliardi and M. Manfredi, IEEE Trans. on Electron Dev., **40**(3), 577 (1993).
- [7] K. Linga, E. Godik, J. Krutov, D. Shushakov, et al. in SPIE **6119**, 61190K-1 (2006).
- [8] F. Risigo et al., Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A, **67**(1), 75 (2009).
- [9] V. Balagura, M. Danilov, B. Dolgoshein, et al., arXiv:physics/0504194 v2 8 Sep 2005.
- [10] P. Eraerds, M. Legré, A. Rochas, H. Zbinden, and N. Gisin, Optics Express **15**(22), 14539 (2007).

- [11] H. C. Burstyn, Rev. Sci. Instrum. **51**(10), 1431 (1980).
- [12] M. A. Finn, G. W. Greenlees, T. W. Hodapp, and D. A. Lewis, Rev. Sci. Instrum. **59**(11), 2457 (1988).
- [13] L. Campbell, Rev. Sci. Instrum. **63**(12), 5794 (1992).
- [14] M. Htjbel and J. Ricka, Rev. Sci. Instrum. **66**(7), 2326 (1994).
- [15] S. Sánchez Majos, P. Achenbach, and J. Pochodzalla, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A **594**(3), 351 (2008).
- [16] M. Mazzillo et al., Sensors and Actuators A **138**(2), 306 (2007).
- [17] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 1 (М., Мир, 1984).

Поступила в редакцию 29 апреля 2009 г.