УДК 530.12

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЛАПСА НЕЙТРОННОЙ ЖИДКОСТИ С УЧАСТИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С. Л. Березницкий

Рассматривается динамика коллапсирующего цилиндра из нейтронной сверхпроводящей жидкости. По поверхности цилиндра вдоль оси протекает электрический ток, снаружи имеется кольцевое магнитное и осевое электрическое поля. Задача решается численно в рамках общей теории относительности Эйнштейна. Обсуждается постановка задачи. Рассматривается устранение особенности $g_{00} = 0$ в той же системе отсчета при помощи замены переменных.

Постановка задачи и основная теория. Решается задача общей теории относительности Эйнштейна, связанная с исследованием динамики коллапса бесконечного цилиндра нейтронной жидкости. Цилиндр предполагается сверхпроводящим, по поверхности его в осевом направлении течёт электрический ток. Вокруг цилиндра имеется круговое магнитное поле и осевое электрическое поле. В задаче предполагается наличие осевой симметрии, то есть все основные величины ρ, ϵ, P – барионная плотность, плотность энергии и давление; B, E – магнитное и электрическое поле и компоненты метрического тензора зависят только от осевого радиуса r и времени t. Наличие магнитного и электрического поля обеспечивает большое внешнее давление на поверхность цилиндра, а барионная плотность ρ также достигает на границе достаточно больших величин. Задача может являться хорошим приближением для задачи о коллапсе замкнутого цилиндра, у которого общий размер системы, длина цилиндра и радиус кривизны оси цилиндра значительно больше начального радиуса цилиндра.

Вводится базовая система отчёта x^i, $i = 0, 1, 2, 3$. Здесь $x^0 = t$ – время, $x^1 = r$ – радиус, $x^2 = \alpha$ – угол поворота вокруг оси, $x^3 = z$ – осевая координата. Считаются отличными от нуля следующие компоненты метрического тензора g_{ij}: g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}. Вводится дополнительное условие калибровки, фиксирующее систему отчёта: $g_{11} = -a$, где a – константа. Для полной фиксации системы отчёта, делающей невозможным преобразование времени $t_1 = f(t)$, необходимо еще одно дополнительное ограничение, наложенное на g_{00}. При расчёте принималось, что в начале координат при $r = 0$ $g_{00} = 1$. Все уравнения написаны в общем виде без учёта этого условия, но оно принималось при численном расчёте.

В качестве стартового решения в момент времени $t = 0$ принимается следующая конфигурация параметров. Вне цилиндра электрическое поле отсутствует, магнитное поле B и компоненты метрического тензора g_{00}, g_{22}, g_{33} (g_{11} – константа) соответствуют статическому решению. Внутри цилиндра в момент времени $t = 0$ задаётся некоторое распределение барионных плотностей ρ, скорости движения нейтронной жидкости равны нулю. В обоих областях частные производные по времени $\dfrac{\partial g_{22}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial g_{33}}{\partial t}$ равны нулю. Из принятого условия, что в начале координат при $r = 0$ $g_{00} = 1$ следует, что $\dfrac{\partial g_{00}}{\partial t} = 0$. На границе цилиндра магнитное поле B должно соответствовать давлению P на границе цилиндра. Связь между давлением P и значением магнитного поля B на границе цилиндра будет обсуждаться ниже. На границе цилиндра все компоненты метрического тензора должны быть непрерывны вместе со своими первыми производными по радиусу r и времени t.

В качестве модели нейтронной жидкости принимается модель идеальной Ферми-жидкости. Делается это по аналогии с работой [1], с той лишь разницей, что там рассматривалась электронная Ферми-жидкость, а здесь рассматривается нейтронная Ферми-жидкость. При этом давление P, плотность энергии ϵ и барионная плотность ρ являются функциями одного параметра x: $P = \alpha f_p(x)$, $\epsilon = \alpha f_\epsilon(x)$, $\rho = \beta f_\rho(x)$. Здесь: $\alpha = \dfrac{mc^2}{\lambda^3}$, $\beta = \dfrac{1}{\lambda^3}$, $\lambda = \dfrac{\hbar}{mc}$, c – скорость света, m – масса нейтрона, $\hbar$ – постоянная Планка, λ – комптоновская длина волны нейтрона.

$$f_p(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left[x\sqrt{1+x^2}\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right],$$

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left[x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right], \qquad (1)$$

$$f_\rho(x) = \frac{1}{3\pi^2}x^3.$$

Система (1) является параметрической записью уравнения состояния. Считается, что температура нейтронной жидкости равна абсолютному нулю. Как нетрудно убедиться, уравнения состояния (1) удовлетворяют условию: $(P+\epsilon)\frac{d\rho}{dx}=\rho\frac{d\epsilon}{dx}$. В дифференциальной форме оно выглядит так:

$$(P+\epsilon)d\rho=\rho d\epsilon. \tag{2}$$

Это условие означает, что при медленном сжатии элемента жидкости работа внешних сил dA, затраченная на сжатие элемента жидкости, равна изменению её внутренней энергии. Нетрудно доказать, что это условие обеспечивает сохранение барионного заряда, где четырехвектор барионного тока J^i равен ρu^i : $J^i=\rho u^i$. Здесь u^i – четырехвектор скорости, удовлетворяющий условию:

$$g_{ij}u^iu^j=1. \tag{3}$$

Тензор энергии–импульса нейтронной жидкости T^{ij} определяется выражением [2]:

$$T^{ij}=(P+\epsilon)u^iu^j-Pg^{ij}. \tag{4}$$

Из известного соотношения

$$T^{ik}_{;k}=0 \tag{5}$$

и (3) следует, что $J^k_{;k}=(\rho u^k)_{;k}=0$, что означает сохранение барионного заряда. Таким образом, сохранение барионного заряда является следствием уравнений движения жидкости (5).

Получим теперь в общем виде условия стыковки на границе двух областей. Введём тензор $U_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$, где R_{ik} – тензор Риччи, R – его свёртка. Как известно, тензор U_{ik} пропорционален тензору энергии–импульса T_{ik}:

$$U_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \tag{6}$$

где k – гравитационная постоянная, c – скорость света. Как известно, тензор U_{ik} тождественно удовлетворяет соотношению:

$$U^{ik}_{;k}=0. \tag{7}$$

Отсюда и из (6) следует аналогичное известное соотношение (5) для тензора энергии–импульса. Таким образом уравнения движения (5) следуют из чисто геометрического соотношения (7). Таким же геометрическим способом можно получить уравнения стыковки тензора энергии–импульса для двух областей пространства, заполненных разными физическими средами. Вдоль границы стыковки метрический тензор g_{ik} непрерывен вместе со своими первыми производными. Рассмотрим Риманово пространство, у которого вдоль некоторой гиперповерхности F_0 метрический тензор g_{ik} непрерывен вместе со своими первыми производными, а более высокие производные могут иметь разрывы. Рассматривается 4-мерный интеграл $S = \int R\sqrt{-g}d\Omega$, где R – свёртка тензора кривизны, g – определитель метрического тензора и делается малое произвольное преобразование координат: $x'^i = x^i + \delta\xi^i$. При этом: $g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}$, $g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}$, где $\delta g^{ik} = \delta\xi^{i;k} + \delta\xi^{k;i}$, $\delta g_{ik} = -\delta\xi_{i;k} - \delta\xi_{k;i}$. Интеграл берётся по некоторой конечной области, охватывающей F_0. На $\delta\xi^i$ накладываются дополнительные ограничения по границам. Так как S – инвариант, то $\delta S = 0$. Отсюда, учитывая произвольность $\delta\xi^i$ и используя формулу Гаусса при преобразовании интегралов, получаем условия стыковки для U^{ik}:

$$(U^{(a)ik} - U^{(b)ik})n_k = 0, \tag{8}$$

где (a) и (b) области по разные стороны от F_0, n_k – вектор нормали к F_0 со стороны области (a). В силу пропорциональности между U^{ik} и тензором энергии–импульса T^{ik} (6) получаем окончательное стыковочное условие для тензора энергии–импульса T^{ik}:

$$(T^{(a)ik} - T^{(b)ik})n_k = 0. \tag{9}$$

Условия стыковки (8), (9) носят общий характер. Рассмотрим теперь осесимметричные уравнения движения системы. Для удобства вводятся величины: f_0, f_2, f_3, при этом: $g_{00} = e^{f_0}$, $g_{22} = -e^{f_2}$, $g_{33} = -e^{f_3}$. Что касается тензора энергии–импульса, то как в случае нейтронной жидкости, так и электромагнитного поля отличны от нуля только следующие компоненты: T_{00}, T_{10}, T_{11}, T_{22}, T_{33}, T^{00}, T^{10}, T^{11}, T^{22}, T^{33}. Из четырёх уравнений движения материи (5), отличных от тождества, остаётся только два:

$$0 = T^{0j}_{;j} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{01}}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t}\right)T^{00} + \frac{1}{2}\left(3\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)T^{01} + \\ + \frac{1}{2}e^{(f_2 - f_0)}\frac{\partial f_2}{\partial t}T^{22} + \frac{1}{2}e^{(f_3 - f_0)}\frac{\partial f_3}{\partial t}T^{33}, \tag{10}$$

$$0 = T^{1j}_{;j} = \frac{\partial T^{10}}{\partial t} + \frac{\partial T^{11}}{\partial r} + \frac{1}{2a}e^{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial r}T^{00} - \frac{1}{2a}e^{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial r}T^{22} - \frac{1}{2a}e^{f_3}\frac{\partial f_3}{\partial r}T^{33} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t}\right)T^{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)T^{11}. \tag{11}$$

Введём обозначение: $Q_{ik} = U_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}U$, $U_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$, $U = U_i^i$. Выпишем окончательный вид уравнений Эйнштейна в ранее введенных переменных для осевой симметрии:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{1}{a}e^{f_0}\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r}\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)\right] + 2e^{(f_0 - f_2)}Q_{22}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_3}{\partial t}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{1}{a}e^{f_0}\left[\frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_3}{\partial r}\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)\right] + 2e^{(f_0 - f_3)}Q_{33}, \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial r \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial r \partial t} + \frac{1}{4}\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\partial f_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial f_3}{\partial t}\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\partial f_3}{\partial r}\right) = Q_{10}, \tag{14}$$

$$2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2}\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial f_3}{\partial r} - ae^{-f_0}\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_3}{\partial t} =$$

$$= -2a\left(Q_{00}e^{-f_0} + \frac{1}{a}Q_{11} + Q_{22}e^{-f_2} + Q_{33}e^{-f_3}\right), \tag{15}$$

$$2\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial f_3}{\partial r} + ae^{-f_0}\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial f_3}{\partial t} = 2a\left(Q_{00} - \frac{1}{a}Q_{11} + Q_{22}e^{-f_2} + Q_{33}e^{-f_3}\right). \tag{16}$$

Величины Q_{ij} вычисляются через значения тензора энергии–импульса T_{ij}, которые зависят от вида материи – нейтронной жидкости или электромагнитного поля. Выпишем выражения для тензора T^{ij} нейтронной жидкости в соответствии с общей формулой тензора энергии–импульса жидкости (4):

$$T^{00} = (P + \epsilon)(u^0)^2 - Pe^{-f_0},\ T^{11} = (P + \epsilon)(u^1)^2 + \frac{1}{a}P,$$

$$T^{22} = Pe^{-f_2},\ T^{33} = Pe^{-f_3},\ T^{01} = (P + \epsilon)u^0u^1.$$

При этом соотношение (3) для вектора 4-х скорости u^i ($u^2 = u^3 = 0$) имеет вид: $(u^0)^2e^{f_0} - a(u^1)^2 = 1$. Обычная скорость жидкости v вычисляется по формуле: $v = \frac{u^1}{u^0}$. Цилиндр нейтронной жидкости предполагается сверхпроводящим и по его поверхности в осевом направлении протекает электрический ток. Магнитное поле H предполагается круговым, а электрическое поле E – осевым. Это соответствует следующим значениям антисимметричного тензора электромагнитного поля F^{ij}: $F^{00} = F^{01} = F^{02} = F^{10} =$

$F^{11} = F^{12} = F^{20} = F^{21} = F^{22} = F^{23} = F^{32} = F^{33} = 0$, $F^{03} = -E$, $F^{13} = H$, $F^{30} = E$, $F^{31} = -H$. Тензор энергии–импульса электромагнитного поля в общем виде вычисляется по формуле [2]: $T^{ik} = \dfrac{1}{4\pi}\left[-F^{il}F^{kn}g_{nl} + \dfrac{1}{4}g^{ik}(F^{lm}F^{pq}g_{pl}g_{qm})\right]$.

В данном конкретном осесимметричном случае ненулевые компоненты тензора энергии–импульса электромагнитного поля вычисляются по формулам:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}e^{(f_3-f_0)}(aH^2 + E^2e^{f_0}),\; T^{11} = \frac{1}{8\pi a}e^{f_3}(aH^2 + E^2e^{f_0}),$$

$$T^{01} = T^{10} = -\frac{1}{4\pi}EHe^{f_3},\; T^{22} = -\frac{1}{8\pi}e^{(f_3-f_2)}(aH^2 - E^2e^{f_0}),\; T^{33} = \frac{1}{8\pi}(aH^2 - E^2e^{f_0}).$$

Рассмотрим теперь уравнения электромагнитного поля. Их можно получить из общих уравнений электромагнитного поля [2]: $F^{ik}_{;k} = 0$. В рассматриваемом случае из 4-х уравнений остаётся только одно:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right) = 0. \tag{17}$$

Ещё одно уравнение получается из того, что электрическое E и магнитное H поля выражаются через 4-мерный потенциал электромагнитного поля A^i. Это приводит к следующему условию, которому подчиняется тензор электромагнитного поля F^{ij} [2]:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{18}$$

или тоже самое в ковариантном виде: $F_{ik;l} + F_{li;k} + F_{kl;i} = 0$. В рассматриваемом случае (18) превращается в уравнение:

$$\frac{\partial E}{\partial r}e^{f_0} - a\frac{\partial H}{\partial t} + Ee^{f_0}\left(\frac{\partial f_3}{\partial r} + \frac{\partial f_0}{\partial r}\right) - aH\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

Таким образом, получаются два окончательных уравнения (17) и (19).

Условия стыковки для параметров нейтронной жидкости и компонентов электромагнитного поля получаются из общих условий стыковки (9). Из 4-х общих условий, в данном конкретном случае отличных от тождества, остаётся только два условия:

$$P = \frac{1}{8\pi}e^{f_3}(aH^2 - E^2e^{f_0}),\; aH\frac{dR}{dt} + Ee^{f_0} = 0, \tag{20}$$

где P – давление на границе нейтронной жидкости, E и H – электрическое и магнитное поля на внешней стороне границы, $R = R(t)$ – значение радиуса r на границе.

Рассмотрим краевые условия на внешней границе и условия в центре. Наиболее чисто с физической точки зрения задачу надо было бы решать так. В области нейтронной жидкости задаётся некоторое стартовое решение в момент времени $t = 0$, удовлетворяющее всем уравнениям Эйнштейна (12)–(16), которое стыкуется с некоторым статическим решением для кольцевого магнитного поля и соответствующего гравитационного поля. Дальше надо рассматривать эволюцию стартового решения. При этом существует система отчёта, в которой статическое решение для магнитного и гравитационного поля сохраняется, а от границы областей нейтронной жидкости и магнитного поля будет двигаться волна гравитационного и электромагнитного поля в сторону увеличения радиуса, разрушающая статическое решение. Граница области разрушенного статического решения будет двигаться со скоростью света в метрике статического решения. Таким образом, при численном решении данной задачи можно было бы ограничиться каким-нибудь внешним радиусом, задать на нём условия неизменности компонентов гравитационного поля и неизменяемость во времени $\dfrac{\partial f_0}{\partial r}$, а также равенство нулю электрического поля $E = 0$. При этом решение было бы правильным только до момента времени, когда волна, разрушающая статическое решение, подойдёт к этому радиусу. Следует отметить, что в рассматриваемой системе отсчёта начало отсчета радиуса может меняться во времени. Это означает следующее. Существуют системы отчёта, в которых это начало отсчета неподвижно. Из системы отсчёта t, r, α, z можно перейти в другую аналогичную систему отсчёта t', r', α', z', где $t' = t'(t, r)$, $r' = r'(t, r)$, $\alpha' = \alpha$, $z' = z$. В новой системе начало отсчёта оказывается подвижным. Именно система отсчёта такого типа будет обсуждаемой выше системой отсчёта, в которой движется волна, разрушающая статическое решение. Это связано с тем, что условие неизменяемости во времени $\dfrac{\partial f_0}{\partial r}$ требует дополнительного переменного параметра в начале отсчета r (НОР). Таким параметром является закон изменения начала отсчёта радиуса от времени: $r_0 = r_0(t)$.

Рассмотрим условия НОР как в системе отсчёта с неподвижным НОР, так и в системе отсчёта с подвижным НОР. Для неподвижного центра g_{22} должна иметь вид $g_{22} = -r^2\epsilon(r)$, где $\epsilon(0) = a$. Здесь и далее ϵ не энергия, а некоторая функция. Следовательно f_2 имеет вид:

$$f_2 = 2\ln r + \epsilon^*(r),\ \epsilon^*(0) = \ln(a), \tag{21}$$

где $\epsilon^* = \ln(\epsilon)$. Также в НОР должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial f_0}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial \epsilon^*}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial r} = 0, \tag{22}$$

и условие для произвольного скаляра f:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0. \tag{23}$$

Приведём теперь аналогичные условия для системы отсчёта с подвижным НОР. Обозначим координату центра $H = H(t)$. Компонента g_{22} должна иметь вид $g_{22} = -(r - H)^2\epsilon(r)$, и величина ϵ в центре равна $\epsilon(H) = \dfrac{g_{00}}{\left(\dfrac{g_{00}}{a} - \left(\dfrac{dH}{dt}\right)^2\right)}$. Следовательно f_2 имеет вид: $f_2 = 2\ln(r - H) + \epsilon^*(r)$, $\epsilon^*(H) = f_0 - \ln\left(\dfrac{e^{f_0}}{a} - \left(\dfrac{dH}{dt}\right)^2\right)$, где $\epsilon^* = \ln(\epsilon)$. Также в НОР должны выполняться следующие условия:

$$\left(\frac{e^{f_0}}{a} - 2\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{dH}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial r} + 2\frac{d^2H}{dt^2} = 0,\quad \frac{\partial \epsilon^*}{\partial r} = 0,\quad e^{f_0}\frac{\partial f_3}{\partial r} + a\frac{dH}{dt}\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0,$$

и условие для произвольного скаляра f: $e^{f_0}\dfrac{\partial f}{\partial r} + a\dfrac{dH}{dt}\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Задачу можно решать в одной из двух систем отсчёта: с подвижным или неподвижным НОР, но рассмотренное условие на внешней границе для больших времён процесса требует большого значения радиуса внешней границы и соответственно большого времени счёта. Для того, чтобы была реальная возможность получить численное решение, необходимо использовать другие внешние краевые условия.

Рассмотрим для примера обычное одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \tag{24}$$

Допустим, что при $x < x_0$ имеется источник волн, идущих слева направо в сторону плюс бесконечности и эти волны разрушают стационарное решение, расположенное вплоть до плюс бесконечности. Вместо отслеживания движения волны до плюс бесконечности, зададим краевое условие при $x = x_0$, $f = F(t)$, где $F(t)$ определяется следующим образом: $F = f(x_0, t)$, $\dfrac{dF}{dt} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{x=x_0}$. $\dfrac{d^2F}{dt^2}$ определяется из (24): $\dfrac{d^2F}{dt^2} = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{x=x_0} = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}$. В каждый момент времени t заданы f, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ при всех x и F, $\dfrac{dF}{dt}$. Из (24) определяется $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, также определено $\dfrac{d^2F}{dt^2}$. Таким образом можно перейти от момента времени t к моменту времени $t + dt$ и получить новые f, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, F, $\dfrac{dF}{dt}$. Условие при $x = x_0$ имеет вид:

$$f = F(t). \tag{25}$$

Физический смысл рассмотренного краевого условия следующий. Условие (25) означает, что волна слева направо проходит через точку $x = x_0$ без отражения, то есть оно соответствует абсолютному поглощению волны. Далее будем называть это условие свободным, так как на систему практически не накладывается ограничений, а краевое условие означает, что система предоставлена сама себе.

Теперь можно сформулировать принципиальную постановку задачи. Дополнение для окончательной постановки задачи будет рассмотрено дальше. Задача решается в системе отсчёта с неподвижным НОР. В качестве условий в центре используются условия (21)–(23), при этом в качестве скаляра f используется величина x, связанная с барионной плотностью из (1). В центре принимается $g_{00} = 1$ ($f_0 = 0$), это однозначно фиксирует время t при возможных преобразованиях времени $t' = t'(t)$. В качестве переменных используются ϵ^*, $\dfrac{\partial \epsilon^*}{\partial t}$ (ϵ^* – из (21)), f_3, $\dfrac{\partial f_3}{\partial t}$ (эти переменные определены во всей области), x из (1), скорость жидкости v (эти переменные определены в области, примыкающей к центру и связанной с нейтронной жидкостью), E, H – компоненты электромагнитного поля (эти переменные определены в области, связанной с электромагнитным полем). Переменная f_0 при использовании одного из уравнений Эйнштейна (16) определяется в каждый момент времени t при помощи обычного интегрирования по радиусу r от центра и выражается через другие, уже перечисленные переменные. На границе стыковки областей нейтронной жидкости и электромагнитного поля используются условия (20). Необходимо особо отметить, что в начальный момент времени $t = 0$ стартовое решение должно быть подобрано так, чтобы выполнялись уравнения Эйнштейна (14)–(16). В дальнейшем при динамическом решении задачи для всех моментов времени $t > 0$ используются только уравнения Эйнштейна (12), (13), (16). Для переменных, связанных с нейтронной жидкостью, используются уравнения движения (10), (11). Для переменных электромагнитного поля E и H используются уравнения, полученные для электромагнитного поля (17), (19). На внешней границе используются уже рассмотренные свободные краевые условия аналогично (25), только для переменных ϵ^*, f_3 вместо волнового уравнения (24) используются уравнения Эйнштейна (12), (13), а для переменных электромагнитного поля E и H используются уравнения (17), (19).

В стартовом решении для момента времени $t = 0$ для нейтронной жидкости используется решение с нулевой скоростью жидкости и с нулевыми скоростями изменения величин ϵ^*, f_3: $\dfrac{\partial \epsilon^*}{\partial t} = \dfrac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \dfrac{\partial f_3}{\partial t} = 0$, а для электромагнитного поля используется статическое решение для магнитного и гравитационного поля.

Теперь рассмотрим окончательную постановку задачи. При численном решении задачи в постановке, рассмотренной выше, удалось получить результаты, но в ряде вариантов вблизи внешней границы внутри рассматриваемой области возникала особенность, в которой $g_{00} = 0$. Как известно [2] , в сферической чёрной дыре существуют системы отсчёта, в которых эта особенность исчезает. В рассматриваемой осесимметричной задаче наблюдается аналогичная ситуация. Для рассматриваемой задачи удалось устранить особенность, не переходя в другую систему отсчёта. Устраняется особенность при помощи замены переменных. Вводится переменная G, связанная с g_{00} соотношением: $g_{00} = G^2$. Величина G может быть положительной, отрицательной и нулём. Также вводятся величины, Z_2 и Z_3, связанные с $\dfrac{\partial f_2}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial f_3}{\partial t}$ соотношениями:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = GZ_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial t} = GZ_3. \tag{26}$$

Другие необходимые переменные зависят от вида материи. Рассмотрим переменные для электромагнитного поля, хотя для нейтронной жидкости принципиальных отличий нет. Вводится переменная E^*, связанная с величиной электрического поля E соотношением:

$$E = \frac{1}{G}E^*. \tag{27}$$

Также вводится переменная v^*, связанная с величиной скорости жидкости v соотношением: $v = Gv^*$. В случае электромагнитного поля в уравнениях Эйнштейна (12)–(16) величины, связанные с материей, имеют вид:

$$Q_{22} = -\frac{\gamma}{8\pi}e^{(f_3+f_2)}(aH^2 - E^2e^{f_0}), \; Q_{33} = \frac{\gamma}{8\pi}e^{2f_3}(aH^2 - E^2e^{f_0}), \; Q_{10} = \frac{a\gamma}{4\pi}e^{(f_0+f_3)}EH,$$

$$Q_{00}e^{-f_0} + \frac{1}{a}Q_{11} + Q_{22}e^{-f_2} + Q_{33}e^{-f_3} = \frac{\gamma}{4\pi}e^{f_3}(aH^2 + E^2e^{f_0}),$$

$$Q_{00}e^{-f_0} - \frac{1}{a}Q_{11} + Q_{22}e^{-f_2} + Q_{33}e^{-f_3} = 0,$$

где $\gamma = \dfrac{8\pi k}{c^4}$, k – гравитационная постоянная, c – скорость света. После рассмотренных замен уравнения Эйнштейна (12)–(16) будут иметь вид:

$$\frac{\partial Z_2}{\partial t} = -\frac{1}{2}GZ_2(Z_2 + Z_3) + \frac{1}{a}G\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{a}\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{\gamma}{4\pi}Ge^{f_3}(aH^2 - E^{*2}), \tag{28}$$

$$\frac{\partial Z_3}{\partial t} = -\frac{1}{2}GZ_3(Z_2+Z_3) + \frac{1}{a}G\left[\frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_3}{\partial r}\left(\frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_3}{\partial r}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{a}\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial f_3}{\partial r} + \frac{\gamma}{4\pi}Ge^{f_3}(aH^2 - E^{*2}), \tag{29}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial r}Z_2 + G\frac{\partial Z_2}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial r}Z_3 + G\frac{\partial Z_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}Z_2\left(2\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial f_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}Z_3\left(2\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial f_3}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{a\gamma}{4\pi}Ge^{f_3}E^*H, \tag{30}$$

$$2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial r^2}\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial f_3}{\partial r} - aZ_2Z_3 = -\frac{a\gamma}{2\pi}e^{f_3}(aH^2 + E^{*2}), \tag{31}$$

$$4\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - G\frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial f_3}{\partial r} + aGZ_2Z_3 = 0. \tag{32}$$

К уравнениям (28)–(32) обязательно надо добавить два уравнения (26). Уравнения, полученные для электромагнитного поля (17) и (19) с новыми переменными будут иметь вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{a}\left(E^*\frac{\partial G}{\partial r} + G\frac{\partial E^*}{\partial r} + E^*G\frac{\partial f_3}{\partial r}\right) - HGZ_3, \tag{33}$$

$$\frac{\partial E^*}{\partial t} = G\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{2}H\left(2\frac{\partial G}{\partial r} + G\frac{\partial f_2}{\partial r} + G\frac{\partial f_3}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}E^*G(Z_2+Z_3). \tag{34}$$

Окончательными уравнениями являются уравнения (26), (28)–(32), (33), (34). Эти уравнения не содержат особенностей. Особенности соответствует то значение радиуса r, при котором $G = 0$ ($g_{00} = 0$). При других значениях радиуса $g_{00} > 0$. В рассмотренных переменных можно изучать особенность в системе отчёта, где она наблюдается, и рассматривать её движение. Результаты расчётов с использованием рассмотренных переменных принципиально не отличались от результатов расчётов с переменными, не учитывающими особенность. Разница состояла только в том, что с обычными переменными при появлении особенности расчёт невозможно дальше продолжать, а с новыми переменными появление особенности не мешает продолжению расчёта.

В дополнение приведём аналитическое решение [3] рассмотренных уравнений Эйнштейна (12)–(16) для статического случая в пространстве – времени без материи:

$$g_{00} = c_0r^A,\ g_{11} = -a,\ g_{22} = c_2r^B,\ g_{33} = c_3r^F, \tag{35}$$

где $A = \dfrac{2q}{\frac{q^2}{q+1}+1}$, $B = \dfrac{2}{\frac{q^2}{q+1}+1}$, $F = -\dfrac{2q}{q^2+q+1}$, q – основная константа, определяющая гравитационное поле, a, c_0, c_2, c_3 – константы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюция звезд* (М., Наука, 1971).

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М., Наука, 1988).

[3] С. Л. Березницкий, *Об одном из решений уравнений Эйнштейна* (М., Препринт ИТЭФ, 2001).

Поступила в редакцию 19 ноября 2008 г.