УДК 504.3.054

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ ДЛЯ РАСПОЛОЖЕННОГО НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ ИСТОЧНИКА

Б. В. Дементьев, С. А. Решетняк

С учетом процессов диффузии и переноса ветром построена модель распределения примеси, загрязняющей атмосферу Земли. На ее основе получены простые формулы, позволяющие с помощью метода газокорреляционной ИК-радиометрии оценивать мощность и местоположение источников примеси, расположенных над поверхностью Земли.

В настоящее время весьма актуальным является контроль мощности источников примесей, загрязняющих атмосферу Земли и влияющих на экологическую обстановку в районе их действия [1]. Контроль состава воздуха можно осуществить с помощью метода газокорреляционной ИК-радиометрии [2–4]. Измеряемой ИК-радиометром величиной является общее содержание примеси в столбе трассы зондирования атмосферы, длина которой H и площадь основания S_H в виде круга с радиусом R_H. При вертикальном трассировании с борта самолета на высоте H порядка нескольких километров радиус R_H составляет величину порядка нескольких десятков метров. Для оценки мощности источника газовой примеси, особенно в случае, когда неизвестно его местоположение, необходимо иметь теоретические модели, описывающие распределение примеси в атмосфере. Именно такие модели построены в [5] для случая, когда локальный или распределенный источники были расположены на земной поверхности. В данной работе речь идет о распределении примеси в случае источников, расположенных над поверхностью Земли. При этом анализируются два случая: плоская земная поверхность и неровная поверхность с пограничным слоем высоты h, в котором выступы и впадины распределены случайным образом. Общее содержание примеси находится при вертикальном трассировании либо непосредственно над источником, либо в дальней зоне наблюдения от него. Данная задача может возникнуть в случае загрязнения атмосферы в результате выбросов различного рода примесей из промышленных труб, высота которых может достигать нескольких десятков метров.

Рассмотрим сначала случай плоской поверхности с расположением точечного источника на высоте z_0 над поверхностью Земли. Уравнение для плотности n числа частиц примеси с учетом ее переноса ветром со скоростью u и турбулентной диффузии с коэффициентом D имеет вид, аналогичный [5]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u\frac{\partial n}{\partial x} = D\Delta n + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) \quad (1)$$

с граничными условиями, которые означают обращение в нуль потока частиц на поверхности Земли и в бесконечно удаленных точках,

$$\left.\frac{\partial n}{\partial z}\right|_{z=0,\infty} = 0, \quad \left(n, \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}\right)_{x,y\to\pm\infty} = 0. \quad (2)$$

Здесь направление оси 0X выбрано совпадающим с направлением скорости ветра u, Q – мощность источника, расположенного в точке $(0, 0, z_0)$. В зависимости от плотности примеси по сравнению с плотностью воздуха возможны процессы ее подъема или оседания, которыми мы пренебрегаем.

В [5] было найдено стационарное решение уравнения (1), которое формируется в случае $u \neq 0$ для источника, расположенного на земной поверхности, т.е. при $z_0 = 0$. Формальная замена в этом решении z на $z - z_0$ неправомерна, так как при этом не выполняется первое граничное условие (2). Однако этому условию подчиняется сумма двух решений [5] от источников, расположенных в точке $(0, 0, z_0)$ и в зеркально отраженной точке $(0, 0, -z_0)$ с одинаковыми мощностями $Q/2$. Поэтому стационарное распределение примеси в пространстве или решение (1) согласно [5] имеет вид:

$$n_{st}(\bar{r}) = \frac{Q}{4\pi D}[\varphi_{(+)}(\bar{r})f_{(+)}(\bar{r}) + \varphi_{(-)}(\bar{r})f_{(-)}(\bar{r})]\exp(\alpha x), \quad (3)$$

$$\varphi_{(\pm)}(\bar{r}) = [\rho^2 + (z \pm z_0)^2]^{-1/2}, \; f_{(\pm)}(\bar{r}) = \exp\left[-\alpha\sqrt{\rho^2 + (z \pm z_0)^2}\right],$$

где $\bar{r}$ – точка наблюдения с координатами x, y, z, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = u/2D$. Кроме координат точки $\bar{r}$ функция распределения n_{st} параметрически зависит от Q, D, u и высоты расположения источника z_0. Отметим, что α^{-1} определяет характерный размер изменения плотности частиц примеси и, как показывают оценки, его значение по порядку величины составляет 1 м. Далее для указанных выше значений R_H и z_0 считаем выполненными следующие условия $\alpha R_H \gg 1$ и $\alpha z_0 \gg 1$.

При анализе процесса распространения загрязнений от объемных источников решение (3) можно рассматривать как функцию Грина. Поскольку при замене x на $x - x_0$ и y на $y - y_0$ граничные условия (2) не меняются, то решение (3) при $Q = 1$ действительно является функцией Грина – распределением частиц в случае действия точечного источника единичной мощности в точке $\bar{r}_0$. С ее помощью можно найти также распределение частиц в случае действия пространственно распределенного источника примеси с мощностью $Q(\bar{r})$:

$$p_{st}(\bar{r}) = \int\int\limits_V\int G(\bar{r}, \bar{r}_0)Q(\bar{r}_0)d\bar{r}_0,$$

где $G(\bar{r}, \bar{r}_0) = n_{st}(x - x_0,\, y - y_0,\, z)_{Q=1}$, а интегрирование проводится по всей области действия источника $Q(\bar{r})$. В данной работе пространственно распределенные источники не рассматриваются. Процесс переноса примеси анализируется на основе (3).

При вертикальном трассировании атмосферы с центром поля зрения радиометра S_H в точке (x, y) измеряемое радиометром полное число частиц K_z определяется следующей формулой

$$K_z(x, y) = \int_{S_H}\int dx'dy'\int\limits_0^\infty dz \cdot n_{st}(x + x',\, y + y', z) = \tag{4}$$

$$= \int_{S_H}\int dx'dy' N_z(x + x', y + y'),$$

где $N_z(x, y) \int\limits_0^\infty n_{st}(x, y, z)dz$ – плотность примеси, интегральная по длине трассировки, полагаемой бесконечно большой из-за условия $H \gg z_0$.

Как показывают вычисления, аналогичные [5], интегральная плотность частиц не зависит от высоты z_0 и имеет вид:

$$N_z(x, y) = \frac{Q}{2\pi D}K_0(\alpha\rho) \cdot \exp(\alpha x) \cong \frac{Q}{2\sqrt{\pi D u\rho}}\exp\left(-\frac{\alpha y^2}{x + \rho}\right), \tag{5}$$

где

$$K_0(\alpha\rho) = \int\limits_0^\infty (\rho^2 + z^2)^{-1/2}\exp(-\alpha\sqrt{\rho^2 + z^2})dz -$$

модифицированная функция Бесселя [6], а последнее равенство в (5) было получено из асимптотики функции $K_0(x) \cong \sqrt{\pi/2x}\exp(-x)$ для $x \gg 1$.

Таким образом, если радиометр расположен достаточно высоко при вертикальном трассировании, то его показания в случае плоской земной поверхности будут точно такими же, как и при расположении источника на поверхности.

Из формулы (5) вытекает также, что в любой плоскости с постоянным значением x интегральная плотность частиц имеет гауссово распределение по y вблизи точки $y = 0$. Чем ближе к источнику, тем более узким становится распределение примеси по y, т.е. в поперечном к скорости ветра направлении. При $y = 0$ интегральная плотность меняется по степенному закону $x^{-1/2}$. Отсюда следует, что вертикальное трассирование атмосферы удобно выполнять вблизи максимума распределения по y или с центром поля зрения прибора в точке $(x, 0)$.

Если центр поля зрения радиометра находится непосредственно над источником или в ближней зоне наблюдения ($x < \alpha R_H^2$), то аналогичные [5] вычисления дают

$$K_z = \frac{QR_H}{u}. \tag{6}$$

При зондировании атмосферы в дальней от источника зоне наблюдения ($x > \alpha R_H^2$) с центром поля зрения в точке $(x, 0)$ получаем

$$K_z = \int_{S_H}\int N_z(x + x', y')dx'dy' \cong \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dux}}\int_{S_H}\int \exp\left(-\frac{\alpha y'^2}{2x}\right)dx'dy' =$$

$$= \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dux}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_H} \exp\left(-\frac{\alpha\rho'^2\sin^2\varphi}{2x}\right)\rho' d\rho' \cong \frac{QR_H^2}{\sqrt{Dux}}, \tag{7}$$

где было принято во внимание то, что при $x > \alpha R_H^2$ подынтегральная функция близка к единице.

Рассмотрим общее содержание примеси (4), если учитывать неровности земной поверхности. Как было показано ранее [7], наличие на поверхности Земли пограничного слоя высоты h, содержащего случайно распределенные выступы и впадины, приводит к зависимости среднего поля скорости ветра от координаты z:

$$u = u_0[1 - \exp(-z/h)], \tag{8}$$

где u_0 – постоянная скорость ветра выше пограничного слоя. При этом необходимо найти решение уравнения (1) с учетом зависимости (8), что представляет собой сложную проблему.

Анализ уравнения (1) указывает на то, что вблизи поверхности Земли на высотах $z < \alpha_0^{-1}$, где $\alpha_0 = u_0/2D$, скорость ветра мала и распределение примеси определяется в основном процессом диффузии. И, наоборот, для $z > \alpha_0^{-1}$ перенос примеси ветром преобладает над диффузией. Поэтому будем анализировать следующую функцию распределения:

$$n_{st} \cong \frac{Q}{4\pi D}[\varphi_{(+)}(\bar{r}) + \varphi_{(-)}(\bar{r})],\ z < \alpha_0^{-1},$$

$$n_{st} \cong \frac{Q}{4\pi D}[\varphi_{(+)}(\bar{r}) f_{(+)}(\bar{r}) + \varphi_{(-)}(\bar{r}) f_{(-)}(\bar{r})] \exp(\alpha x),\ z > \alpha_0^{-1}, \tag{9}$$

где $\alpha(z) = \alpha_0[1 - \exp(-z/h)]$.

Согласно (9), интегральная плотность частиц по высоте представляется в виде суммы двух интегралов:

$$N_z \cong \int\limits_0^{\alpha_0^{-1}} n_{st} dz + \int\limits_{\alpha_0^{-1}}^{\infty} n_{st} dz = N_{z1} + N_{z2}.$$

Как уже отмечалось, рассматриваются такие высоты источника примеси, для которых $z_0 \gg \alpha_0^{-1}$. При этом условии оценка первого интеграла тривиальна, так как подынтегральная функция практически не зависит от z:

$$N_{z1} \cong \frac{Q}{2\pi D\alpha_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}},\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

Второй интеграл имеет достаточно громоздкий вид и его значение определяется всеми параметрами модели. Простую оценку данного интеграла можно сделать, рассматривая такие высоты расположения источника, при которых z_0 в несколько раз превышает высоту пограничного слоя. При этом, как показывают полученные ниже формулы, N_{z2} практически не зависит от h. Действительно, оценка этого интеграла показывает, что основной вклад в N_{z2} дает область интегрирования вблизи перевальной точки z_0. Поэтому, заменяя $\alpha(z)$ на α_0 и нижний предел интегрирования на нуль в силу неравенства $z_0 \gg \alpha_0^{-1}$, приходим для N_{z2} к формуле (5). В результате интегральная по высоте плотность частиц примеси принимает вид:

$$N_z(x, y) \cong \frac{Q}{2\pi D} K_0(\alpha\rho) \exp(\alpha x) + \frac{Q}{2\pi D\alpha_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}}. \tag{11}$$

Второй член в (11) связан с наличием пограничного слоя, где скорость ветра мала. В данном слое происходит накопление примеси за счет ее диффузии от источника, а отток примеси из него определяется переносом за счет ветра в области выше пограничного слоя.

Измеряемое радиометром общее количество примеси находится, согласно (4), интегрированием по площади его поля зрения S_H. Интегрирование первого члена в (11) приводит к результатам для плоской поверхности, а интегрирование второго члена определяет добавку к K_z, связанную с наличием пограничного слоя.

Так, если центр поля зрения находится непосредственно над источником, то

$$K_z = \frac{QR_H}{u_0} + \frac{Q}{2\pi D\alpha_0}\int_{S_H}\int \frac{dxdy}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \cong \frac{QR_H}{u_0}\left(1 + \frac{R_H}{z_0 + \sqrt{z_0^2 + R_H^2}}\right). \quad (12)$$

При трассировании с центром поля зрения в точке ($x > \alpha_0 R_H^2$) получаем:

$$K_z = \frac{QR_H^2}{\sqrt{Du_0x}} + \frac{Q}{2\pi D\alpha_0}\int_{S_H}\int \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x+x')^2 + y'^2 + z_0^2}} \cong$$

$$\cong \frac{QR_H^2}{\sqrt{Du_0x}} + \frac{QR_H^2}{u_0\sqrt{x^2 + z_0^2}}. \quad (13)$$

Отметим, что в формулах (12) и (13) нельзя рассматривать малые высоты z_0, так как они получены при условии $z_0 > h$. В пограничный слой попадают частицы примеси из-за диффузии от источника, поэтому в формулах (12) и (13) вторые члены убывают с ростом z_0, как z_0^{-1}.

Простая оценка показывает, что в дальней зоне наблюдения с расстоянием зондирования $x > \alpha_0 R_H^2$ второй член в (13) существенно меньше первого. Это объясняется тем, что с ростом x или времени распространения плотность частиц примеси из-за диффузии ее вверх уменьшается и, следовательно, пограничный слой перестает влиять на процесс распространения примеси. Таким образом, в дальней от источника зоне наблюдения как для плоской, так и для неровной земной поверхности измеряемое радиометром общее содержание примеси не зависит от z_0 и имеет вид:

$$K_z \cong \frac{QR_H^2}{\sqrt{Du_0x}}, \quad (14)$$

где $x > \alpha_0 R_H^2$.

Полученный результат (14) можно использовать для оценки мощности источника примеси и его местоположения. Действительно, пусть радиометром сделаны два замера $K_{z1} = K_z(x_1)$ и $K_{z2} = K_z(x_2)$, причем $x_1 < x_2$ и $K_{z1} > K_{z2}$. Тогда, согласно формуле (14), получаем:

$$Q \cong \frac{K_{z1}K_{z2}}{R_H^2}\left(\frac{Du_0\Delta}{K_{z1}^2 - K_{z2}^2}\right)^{1/2}, \quad x_1 \cong \frac{\Delta \cdot K_{z2}^2}{K_{z1}^2 - K_{z2}^2}, \quad (15)$$

где $\Delta = x_2 - x_1$ – расстояние между двумя замерами радиометра.

Таким образом, с помощью газокорреляционного ИК-радиометра можно осуществлять не только контроль состава атмосферы Земли, но и производить оценку мощностей источников различного рода примесей, загрязняющих атмосферу, и находить их местоположения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Уорк, С. Уорнер, *Загрязнение воздуха. Источники и контроль* (М., Мир, 1980).

[2] L. Pan, D.P. Edwards, J.C. Gille, et al., Appl. Opt. **34**(30), 6976 (1995).

[3] J. Drummond et al., Proceedings of SPIE **3756**, 396 (1999).

[4] Я. А. Виролайнен, Б. В. Дементьев, В. В. Иванов, В. В. Поляков, Исследования Земли из космоса, N 6, 39 (2002).

[5] B. V. Dement'ev, S. A. Reshetnyak, L. A. Shelepin, and V. A. Shcheglov, Journal of Russian Laser Research **26**(3), 179 (2005).

[6] Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы* (М., Наука, 1983).

[7] Б. В. Дементьев, С. А. Решетняк, Краткие сообщения по физике ФИАН, **34**(1), 38 (2007).

Поступила в редакцию 21 ноября 2008 г.