УДК 533.932

О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕОРИИ СПЕКТРА ИОННО-ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. П. Силин, П. В. Силин

Доказана независимость спектра ионно-звуковой турбулентности от константы разделения переменных: модуля волнового вектора и его угла при решении интегрального уравнения, определяющего интенсивность флуктуаций $N(\mathbf{k})$.

Ключевые слова: ионно-звуковая турбулентность, разделение переменных.

При построении теории ионно-звуковой турбулентности прорывным моментом явилось приближение разделения переменных распределения турбулентных пульсаций $N(\mathbf{k})$ как функции модуля волнового вектора $\mathbf{k}$ и угла θ_k между волновым вектором и силой, приводящей к ионно-звуковой (ИЗ) неустойчивости (например, $e\mathbf{E}$, где e – электрический заряд электрона, а $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля),

$$N(\mathbf{k}) = N(k)\Phi(\cos\theta_k). \tag{1}$$

В работах [1, 2] постоянная разделения принималась равной единице. До сих пор это приводит к возникновению недоумения. Ниже мы покажем, что распределение ИЗ пульсаций от постоянной разделения не зависит. При этом мы ограничимся моделью Силина–Урюпина [2], оставляя читателю возможность убедиться в аналогичном результате для модели Быченкова–Силина–Урюпина [1, 3].

Напомним, что стационарная теория ИЗТ базируется на уравнении, отвечающем равенству нулю инкремента ионно-звуковых волн

$$\Gamma \equiv \gamma_e + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{NL} = 0 \tag{2}$$

с частотным спектром

$$\omega = \omega(k) = \frac{\omega_L k r_{De}}{(1 + k^2 r_{De}^2)^{1/2}}. \tag{3}$$

Здесь k – модуль волнового вектора, r_{De} – дебаевский радиус электронов, $\omega_L^2 = \omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2$, $\omega_{L\alpha}^2 = (4\pi e_\alpha^2 N_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ – ленгмюровская частота ионов сорта α, γ_{NL} – вклад в инкремент

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991, Москва, Ленинский пр-т, 53.

эффекта вынужденного рассеяния волн на ионах, а γ_e, γ_1 и γ_2 – вклады соответственно электронов, первого и второго сорта ионов, обусловленные их черенковским взаимодействием с волнами. При этом в предположении разделения переменных распределение турбулентных пульсаций принимается в виде

$$N(\mathbf{k}) = N_C(k)\Phi_C(\cos\theta_k), \tag{4}$$

где θ – угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и направлением напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, приводящего к возникновению тока в плазме и соответственно к ионно-звуковой неустойчивости. Относительно обозначения C – чуть ниже.

Прежде всего укажем, что

$$\gamma_{NL} = A\left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{\omega_L^2}{\omega_{Le}}(kr_{De})^2\times(1+k^2r_{De}^2)\frac{d}{d(kr_{De})}\left[(kr_{De})^4(1+k^2r_{De}^2)N_C(k)\right]\times\phi_C(\cos\theta_k), \tag{5}$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 N_e/m_e}$ – электронная ленгмюровская частота,

$$A = \left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{(\omega_{L1}^2 r_{D1}^4+\omega_{L2}^2 r_{D2}^4)\omega_{Le}}{\omega_L^6 r_{De}^5(r_{D1}^2+r_{D2}^2)^2}, \tag{6}$$

$$\phi_C(x) = \frac{1}{2}[M_{C0}-M_{C2}-(M_{C0}-3M_{C2})x^2-3(M_{C1}-M_{C3})x+(3M_{C1}-5M_{C3})x^3], \tag{7}$$

где $r_{D\alpha}$ – дебаевский радиус ионов сорта α, а

$$M_{Cn} = \int_0^1 dx\cdot x^n\Phi_C(x). \tag{8}$$

Далее сумма $\gamma_e+\gamma_1+\gamma_2$ дается с помощью решений квазилинейных уравнений для электронов и двух сортов ионов следующим выражением

$$\gamma_e+\gamma_1+\gamma_2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{\omega_L^2}{\omega_{Le}}\frac{kr_{De}}{[1+k^2r_{De}^2]}\left[\frac{2}{\pi}\cos\theta_k\int_0^{\sin\theta_k}\frac{d\xi}{(\sin^2\theta_k-\xi^2)^{1/2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{v_E}{v_{C2}(\sqrt{1-\xi^2})}+\frac{v_{C1}(\sqrt{1-\xi^2})}{v_{C2}(\sqrt{1-\xi^2})}\times\frac{1+\delta}{1-\xi^2}\right)-(1+\delta)\frac{\omega(k)}{kr_{De}v_s}\right]. \tag{9}$$

Здесь $v_s = \omega_L r_{De}$ – скорость ионного звука и

$$\delta = \delta_1+\delta_2, \tag{10}$$

$$\delta_\alpha = \frac{N_e \omega_{L\alpha}^2 f_{0\alpha}(v_s)}{N_\alpha \omega_{Le}^2 f_{0e}(v_s)}, \tag{11}$$

а f_{0e} и $f_{0\alpha}$ – максвелловские функции распределения электронов и ионов соответственно. Помимо этого

$$v_E = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{eE}{m_e \omega_L r_{De}}, \tag{12}$$

$$v_{Cn} = \frac{\omega_L}{4\pi^2 r_{De}^5 N_e m_e \omega_{Le}} \lambda_{Cn} \chi_{Cn}(y), \tag{13}$$

где

$$\lambda_{Cn} = \int\limits_{k_{\min} r_{De}}^{\infty} d\xi \cdot \xi^4 (1+\xi^2)^{(n-5)/2} N_C\left(\frac{\xi}{r_{De}}\right), \tag{14}$$

$$\chi_{Cn}^{(y)} = \int\limits_0^y \frac{dx \Phi_C(x) x^n}{y^n (x^2 - y^2)^{1/2}}. \tag{15}$$

Записанные выражения позволяют в приближении, пренебрегающем отличием от единицы отношения $(\omega/k r_{De} v_s)$, стоящего после $(1+\delta)$ в формуле для $\gamma_e + \gamma_1 + \gamma_2$ (что качественно упрощает рассмотрение) получить следующее следствие из уравнения $\Gamma = 0$:

$$A(kr_{De})(1+k^2 r_{De}^2)^{5/2} \frac{d}{d(kr_{De})}[(kr_{De})^4 (1+k^2 r_{De}^2) N_C(k)] +$$

$$+\frac{1}{\phi_C(\cos\theta_k)}[(2/\pi)\cos\theta_k \int\limits_0^{\sin\theta_k} \frac{d\xi}{(\sin^2\theta_k - \xi^2)^{1/2}} \left(\frac{3\pi^{5/2} r_{De}^4 e E N_e \omega_{Le}}{\omega_L^2 \lambda_{C2} \chi_{C2}(\sqrt{1-\xi^2})} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{\lambda_{C1}\chi_{C1}(\sqrt{1-\xi^2})}{\lambda_{C2}\chi_{C2}(\sqrt{1-\xi^2})} \times \frac{(1+\delta)}{(1-\xi^2)}\right) - (1+\delta)] = 0.$$

В этом уравнении первое слагаемое зависит только от переменной k, а второе – только от θ_k. Поэтому оба они являются постоянными. Пусть первое равно $-C$, а второе $+C$. Это позволяет записать следующие два уравнения

$$\frac{d}{d(kr_{De})}[(kr_{De})^4 (1+k^2 r_{De}^2) N_C(k)] = -\frac{C}{A(kr_{De})(1+k^2 r_{De}^2)^{5/2}}, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^{\sin\theta_k} \frac{d\xi}{(\sin^2\theta_k - \xi^2)^{1/2}} \left(\frac{3\pi^{5/2} r_{De}^4 e E N_e \omega_L}{\omega_L^2 \lambda_{C2} \chi_{C2}(\sqrt{1-\xi^2})} + \frac{\lambda_{C1}\chi_1(\sqrt{1-\xi^2})}{\lambda_2 \chi_2(\sqrt{1-\xi^2})} \times \frac{(1+\delta)}{1-\xi^2}\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\theta_k}[1 + \delta + C\phi_C(\cos\theta_k)].$$

Решение уравнения (17) имеет следующий вид

$$N_C(k) = \frac{C}{A}y(kr_{De}), \tag{19}$$

где

$$y(x) = \frac{1}{x^4(1+x^2)}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right) - \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{3(1+x^2)^{3/2}}\right]. \tag{20}$$

Таким образом функция $y(x)$ определяет распределение ионно-звуковых пульсаций по модулю волнового вектора, или, как можно говорить, по частотам ионно-звуковых волн. Теперь используем функции

$$\Phi(x) = \Phi_C(x)C,\ N(k) = \frac{N_C(k)}{C}. \tag{21}$$

Тогда имеем

$$N(\mathbf{k}) = N_C(k)\Phi_C(\cos\theta_k) = N(k)\Phi(\cos\theta_k). \tag{22}$$

Используя явное выражение для $N_C(k)$, можем теперь записать (при $(e_1/m_1) \neq (e_2/m_2)$):

$$v_n(z) = v_N \cdot \lambda_n \cdot \chi_n(z), \tag{23}$$

где

$$v_N = \frac{\omega_L^7(r_{D1}^2 + r_{D2}^2)^2}{2(2\pi)^{3/2}N_e m_e \omega_{Le}^2(\omega_{L1}^2 r_{De}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^2)} \times \frac{1}{\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2}, \tag{24}$$

$$\lambda_n = \int\limits_{(k_{\min} r_{De})}^{\infty} d\xi \cdot \xi^4 \cdot (1+\xi^2)^{(n-5)/2} y(\xi), \tag{25}$$

$$\chi_n = \frac{1}{y_n}\int\limits_0^y \frac{dx \cdot x^n \cdot \Phi(x)}{(x^2 - y^2)^{1/2}}. \tag{26}$$

Кроме того, используя обозначение

$$K_N = \frac{v_E}{v_N}, \tag{27}$$

называемое в теории ионно-звуковой турбулентности турбулентным числом Кнудсена, можно теперь записать уравнение (18) в виде

$$\int\limits_0^{\sin\theta_k} \frac{d\xi}{(\sin^2\theta_k - \xi^2)}\left(\frac{K_N}{\lambda_2\chi_2(\sqrt{1-\xi^2})} + \frac{\lambda_1\chi_1(\sqrt{1-\xi^2})}{\lambda_2\chi_2(\sqrt{1-\xi^2})} \times \frac{(1+\delta)}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \tag{28}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\theta_k}[1+\delta+\phi(\cos\theta_k)],$$

где $\lambda_1 \cong 0.543$; $\lambda_2 \cong 0.556$; $\phi(x)$ подобно $\phi_C(x)$, но в отличие от последнего не зависит от постоянной разделения C:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}[M_0 - M_2 - (M_0 - 3M_2)x^2 - 3(M_1 - M_3)x + (3M_1 - 5M_3)x^2] \tag{29}$$

и

$$M_n = \int\limits_0^1 dx \cdot x^n \Phi(x). \tag{30}$$

Таким образом, согласно (28), угловое распределение ионно-звуковых пульсаций $\Phi(x)$ не зависит от постоянной разделения переменных C, как не зависит от C и полное распределение $N(\mathbf{k})$.

Для решения уравнения (28) воспользуемся уравнением Абеля

$$\int\limits_0^x \frac{d\xi u(\xi)}{\sqrt{x^2-\xi^2}} = f(x)$$

и его решением в виде

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{sf(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}}.$$

При этом принимаем за $u(\xi)$ выражение в круглых скобках левой части (28), а $f(x)$ – правую часть уравнения (28). Тогда можем записать следующее интегральное уравнение для функции $\Phi(x)$:

$$\frac{K_N}{\lambda_2\chi_2(\cos\theta_k)} + \frac{\lambda_1\chi_1(\cos\theta_k)}{\lambda_2\chi_2(\cos\theta_k)} \times \frac{1+\delta}{\cos\theta_k} = \frac{d}{d(\sin\theta_k)}\int\limits_0^{\sin\theta_k} \frac{sds}{\sqrt{\sin^2\theta_k - s^2}} \times \tag{31}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\left[1+\delta+\phi\left(\sqrt{1-s^2}\right)\right] = \frac{1}{\cos^2\theta_k}[1+\delta+\varphi(\cos\theta_k)],$$

где возникшая после взятия интеграла функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\Bigg[M_0 - M_2 - (M_0 + 6M_1 - 3M_2 - 8M_3)x^2 + (6M_1 - 10M_3)x^4 +$$

$$+(M_0 - 3M_2)x^2(1-x^2)^{1/2}\ln\left(\frac{1+(1-x^2)^{1/2}}{x}\right)\Bigg]. \tag{32}$$

Для получения асимптотических решений последнее интегральное уравнение (31), после умножения его на $\chi_2(\cos\theta_k)$ и $\cos^2\theta_k$, а также деления на $(1+\delta)$, перепишем в виде

$$\frac{K_N x^2}{\lambda_2(1+\delta)} = \int\limits_0^x \frac{dt\cdot t\cdot\Phi(t)}{(x^2-t^2)^{1/2}}\left[\frac{t}{x^2}\left(1+\frac{\varphi(t)}{1+\delta}\right)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]. \tag{33}$$

Это уравнение решено в работе В. П. Силина и С. А. Урюпина [2] в приближении $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=0.5$.

При этом в пределе $K_n \ll \lambda(1+\delta)^2$ имеем

$$\Phi(x) = \frac{4K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)x}\frac{d}{dx}\frac{x^4}{(1+\epsilon-x)^{1-\alpha}}, \tag{34}$$

где

$$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln\left[\dfrac{3\pi\lambda(1+\delta)^2\ln 2}{2K_n}\right]};\ \epsilon = \frac{2K_N}{3\pi\lambda(1+\delta)^2\ln 2}\ln\frac{3\pi\lambda(1+\delta)^2\ln 2}{2K_N}. \tag{35}$$

Соответственно в пределе $K_N \gg \lambda(1+\delta)^2$ имеем

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_N}{\lambda}\right)^{1/2}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{t^5 dt}{\bar\varphi(t)(x^2-t^2)^{1/2}}, \tag{36}$$

где использованы полученные значения $M_n = M_n\left(\frac{K_N}{\lambda}\right)^{1/2}$ и

$$M_0 = 2.47;\ M_1 = 1.84;\ M_2 = 1.44;\ M_3 = 1.17.$$

Соответственно этому

$$\bar\varphi(t) = 0.51 + 0.08t^2 - 0.33t^4 - 0.92t^2(1-t^2)^{1/2}\ln\left[\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t}\right]. \tag{37}$$

Тем самым мы показали, как общее рассмотрение разделения переменных сохраняет старый наш результат о спектре ионно-звуковой турбулентности для плазмы с двумя сортами ионов, полученный в работе [2]. Таким образом, проведенное рассмотрение подтверждает правомерность использования в [2] постоянной разделения, равной единице.

Авторы выражают признательность за финансовую поддержку этой работы в рамках проекта N 09–02–00674 РФФИ и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН N-30.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] В. Ю. Быченков, В. П. Силин, ЖЭТФ **82**, 1886 (1982).

[2] В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **100**, 78 (1992).

[3] В. Ю. Быченков, В. П. Силин, С. А. Урюпин, Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3, 27 (1983).

Поступила в редакцию 14 января 2010 г.