УДК 530.12:531.51

ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА–КАРТАНА. II. ПРОСТРАНСТВА РИМАНА–КАРТАНА

Р. Ф. Полищук

Рассмотрен лагранжиан фермионной материи. Дана оценка для неё минимальной массы чёрной дыры порядка 10^{19} *грамм.*

Ключевые слова: Эйнштейн, Картан, гравитация, кручение.

В предыдущей работе [1] мы обсудили оправданность включения в теорию гравитации кручения пространства-времени. Это предполагает переход от пространств Римана к пространствам Римана–Картана.

Метрически-аффинные пространства

Пусть тройка (M, g, ω) представляет собою *метрически-аффинное пространство* с независимыми друг от друга метрикой и связностью. Обозначим ортонормированный репер и корепер, соответственно, e_μ, θ^ν. Форма связности $\omega^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\rho}\theta^\rho$ определяет ковариантную производную D и 2-формы кривизны и кручения:

$$D = \theta^\mu \nabla_\mu,$$

$$\nabla_\mu e_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho,$$

$$\Omega^\mu_\nu = d\omega^\mu_\nu + \omega^\mu_\rho \wedge \omega^\rho_\nu = \frac{1}{2} R^\mu_{\nu\rho\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^\sigma,$$

$$\Theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu_\nu \wedge \theta^\nu = \frac{1}{2} Q^\mu_{\nu\rho}\theta^\nu \wedge \theta^\rho. \qquad (1)$$

В голономной системе отсчёта (используем её, чтобы не вводить коэффициентов вращения Риччи для неголономной тетрады)

$$d\theta^\mu = 0,$$

$$Q^\mu_{\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\rho\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}. \qquad (2)$$

Формы кривизны и кручения удовлетворяют *тождествам Бъянки*:

$$D\Omega^\mu_\nu = 0,$$

АКЦ (Астрокосмический центр) ФИАН, e-mail: rpol@asc.rssi.ru

$$D\Theta^\mu = \Omega^\mu_\nu \wedge \theta^\nu. \tag{3}$$

Метрика определяет метрическую и симметрическую (то есть риманову) форму связности Леви–Чивита $\bar{\omega}$:

$$d\theta^\mu + \bar{\omega}^\mu_\nu \wedge \bar{\theta}^\nu,$$
$$\bar{D} g_{\mu\nu} = 0,$$
$$\bar{\Omega}^\mu_\nu = d\bar{\omega}^\mu_\nu + \bar{\omega}^\mu_\rho \wedge \bar{\omega}^\rho_\nu. \tag{4}$$

Кручение, ковариантную производную метрики и форму кривизны можно определить с помощью 1-формы $\varkappa^\mu_\nu = \omega^\mu_\nu - \bar{\omega}^\mu_\nu$:

$$D g_{\mu\nu} = -\varkappa_{\mu\nu} - \varkappa_{\nu\mu},$$
$$\Theta^\mu = \varkappa^\mu_\nu \wedge \theta^\nu,$$
$$\Omega^\mu_\nu = \bar{\Omega}^\mu_\nu + \bar{D}\varkappa^\mu_\nu + \varkappa^\mu_\rho \wedge \varkappa^\rho_\nu. \tag{5}$$

Здесь мы видим требуемые размерностью (обратный квадрат длины) квадратичные члены по кручению, которые можно связать со спин-спиновым взаимодействием в классическом приближении.

Пространство Римана–Картана есть метрически-аффинное пространство с метрической связностью:

$$D g_{\mu\nu} = 0,\ \varkappa_{\mu\nu} + \varkappa_{\nu\mu} = 0,\ \Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0. \tag{6}$$

В этом пространстве связность определяется метрикой и кручением. Для $Q_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma} Q^\sigma_{\mu\nu}$ имеем $\varkappa_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}(Q_{\mu\sigma\nu} + Q_{\nu\mu\sigma} + Q_{\sigma\mu\nu})\theta^\sigma$.

Уравнения Эйнштейна–Картана запишем в форме Киббла–Шамы [2–4] (последние два уравнения эквивалентны):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi t_{\mu\nu},$$
$$Q^\rho_{\mu\nu} + \delta^\rho_\mu Q^\sigma_{\nu\sigma} - \delta^\rho_\nu Q^\sigma_{\mu\sigma} = 8\pi s^\rho_{\mu\nu},$$
$$Q^\rho_{\mu\nu} = 8\pi \left(s^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu s^\sigma_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\delta^\rho_\nu s^\sigma_{\sigma\mu} \right). \tag{7}$$

При переносе членов с кручением вправо первое уравнение принимает вид уравнения Эйнштейна с эффективным тензором энергии-импульса (ТЭИ):

$$\bar{R}_{\mu\theta} - \frac{1}{2}\bar{R} g_{\mu\nu} = 8\pi T^{\text{eff}}_{\mu\nu},$$

$$T^{\text{eff}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \varkappa_{\mu\rho} \wedge \varkappa^{\rho}_{\nu},$$
$$(T^{\text{eff}} = T + s^2),$$
$$T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\rho}(s^{\nu\mu\rho} + s^{\nu\rho\mu} + s^{\mu\rho\nu}). \tag{8}$$

Здесь третье уравнение есть безындексная символическая запись второго уравнения, отмечающая квадратичный вклад спина в прогибание геометрии пространства-времени. При наличии спинирующей материи тензор T^{eff} может *не* удовлетворять условиям *положительности* плотности массы-энергии, даже если им удовлетворяет тензор T. Тем самым могут нарушаться условия неизбежного наличия сингулярности внутри ловушечной поверхности, утверждаемые теоремами Хокинга и Пенроуза. Приведём известный пример решения Копчиньского [5] модифицированных уравнений Фридмана для Вселенной, заполненной спинирующей пылью с плотностью массы ρ и плотностью спина σ, зависящих только от времени:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$P^{\mu} = \rho u^{\mu}, u^{\mu} = \delta^{\mu}_{0},$$

$$S_{23} = \sigma,$$

$$S_{\mu\nu} = 0,\ \mu + \nu \neq 5,$$
$$M = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 = \text{const},\ S = \frac{4}{3}\pi\sigma a^3 = \text{const},$$
$$\frac{1}{2}(a)^2 - Ma^{-1} + \frac{3}{2}S^2 a^{-4} = 0. \tag{9}$$

Здесь постоянная Ньютона принята за единицу, так что масса M имеет размерность длины, спин (пропорциональный постоянной Планка) s – размерность квадрата длины. Мы видим, что спин как отталкивательный потенциал предотвращает коллапс пространства, его сжатие в точечную сингулярность.

Рассмотрим в искривлённом пространстве-времени плотность лагранжиана спинорной материи L_{ψ} $(\hbar = c = 1)$:

$$L_{\psi} = \frac{i\sqrt{-g}}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi_{,\mu} - \bar{\psi}_{,\mu}\gamma^{\mu}\psi) - \frac{i\sqrt{-g}}{2}\bar{\psi}\{\gamma^{\mu}, \Gamma_{\mu}\}\psi - m\sqrt{-g}\bar{\psi}\psi,$$

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{4}\omega_{ab\mu}\gamma^{a}\gamma^{b},$$

$$S^{\mu\nu\lambda} = \frac{i\sqrt{-g}}{2}\bar{\psi}\gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda]}\psi,$$

$$t^a_\mu = \delta L_\psi / \delta e^\mu_a,$$

$$S^\mu_{ab} = 2\delta L_\psi / \delta \omega^{ab}_\mu. \tag{10}$$

Здесь мы ввели латинские лоренцевы индексы для тетрады и 1-формы спиновой связности. Рассмотрим узкую мировую трубку, образуемую эволюцией данного 3-объема материи, с координатами центральной линии $X^\mu(s)$, точки которой параметризуются аффинным параметром s, а точки среды – координатами x^μ. Определим

$$\delta x^\mu = x^\mu - X^\mu,$$

$$\delta x^0 = 0,$$

$$u^\mu = dX^\mu / ds. \tag{11}$$

Уравнения движения $u^\mu(s)$ для малого объёма материи с внутренним угловым моментом вращения $S^{\mu\nu} = P^\mu u^\nu - P^\nu u^\varpi$ (в квантовом пределе – спином) вывел Папапетру (1951) [6]. При выполнении условий Пирани $S^{\mu\nu} u_\nu = 0$ они имеют вид:

$$\frac{D}{Ds}\left(mu^\mu + u_\nu \frac{DS^{\mu\nu}}{Ds}\right) + \frac{1}{2} R^\mu_{\nu\alpha\beta} S^{\alpha\beta} u^\nu = 0,$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{Ds} + u^\mu u_\lambda \frac{DS^{\nu\lambda}}{Ds} - u^\nu u_\lambda \frac{DS^{\mu\lambda}}{Ds} = 0. \tag{12}$$

Номура, Ширафуджи и Хаяши (1991) [7] обобщили уравнения движения для пространства-времени с кручением, используя законы сохранения для плотности спина (см. уравнения (10) для несимметричной, вообще говоря, связности) и ТЭИ:

$$t^{\mu\nu} - t^{\nu\mu} = \nabla_\lambda S^{\mu\nu\lambda},$$

$$\nabla_\lambda t^{\mu\lambda} = 0. \tag{13}$$

Определим для малого объёма вещества (со "спин-орбитальным" моментом), следуя [2, 6, 7], интегралы:

$$M^{\mu\nu} = u^0 \int t^{\mu\nu} dV,$$

$$M^{\mu\nu\lambda} = -u^0 \int \delta x^\mu t^{\nu\lambda} dV,$$

$$N^{\mu\nu\lambda} = u^0 \int S^{\mu\nu\lambda} dV. \tag{14}$$

Из условия $\delta x^0 = 0$ следует $M^{0\nu\lambda} = 0$. Предполагаем, что для малого объёма можно пренебречь произведением квадрата малого смещения на плотность ТЭИ и произведением малого смещения в объёме тела на плотность спина (орбитальный момент в пределе убывания смещения обращается в нуль, а кручение, проявляющееся при переносе точки вдоль малого контура, не замыкающегося в пространстве с кручением, мало по сравнению с размером контура). Интегрируя уравнение (13) для спина по 3-объёму dV на гиперповерхности уровня времени x^0, получаем:

$$\int S^{\mu\nu 0}_{,0} dV - \int \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} S^{\nu\alpha\beta} dV + \int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} S^{\mu\alpha\beta} dV - 2\int t^{[\mu\nu]} dV = 0. \quad (15)$$

Закон сохранения (13) также даёт уравнения с привлечением координат (в локально-лоренцевой системе отсчёта они определяют реальные малые смещения в рассматриваемом малом объёме):

$$\int (x^\lambda S^{\mu\nu 0})_{,0} dV = \int S^{\mu\nu\lambda} dV + \int x^\lambda \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} S^{\nu\alpha\beta} dV - \int x^\lambda \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} S^{\mu\alpha\beta} dV + 2\int x^\lambda t^{[\mu\nu]} dV. \quad (16)$$

Подстановка (11) в (16) даёт

$$\frac{u^\lambda}{u^0} \int S^{\mu\nu 0} dV + X^\lambda \int S^{\mu\nu 0}_{,0} dV =$$

$$= \int S^{\mu\nu\lambda} dV + X^\lambda \int \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} S^{\nu\alpha\beta} dV - \int \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} S^{\mu\alpha\beta} dV + 2\int t^{[\mu\nu]} dV + 2\int \delta x^\lambda t^{[\mu\nu]} dV \quad (17)$$

откуда с учётом (15) получаем [7]:

$$\frac{u^\lambda}{u^0} \int S^{\mu\nu 0} dV = \int S^{\mu\nu\lambda} dV + 2\int \delta x^\lambda t^{[\mu\nu]} dV,$$

$$M^{\lambda[\mu\nu]} = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^\lambda}{u^0} N^{\mu\nu 0} - N^{\mu\nu\lambda}\right). \quad (18)$$

При $\lambda = 0$ получаем тождество в силу $M^{0\mu\nu} = 0$. Полная антисимметрия плотности спина в (10) даёт полную антисимметрию $N^{\mu\nu\lambda}$. Для точечной частицы в однополюсном приближении $M^{\mu\nu\lambda} = 0$, откуда

$$N^{\mu\nu\lambda} = \frac{u^\lambda}{u^0} N^{\mu\nu 0}. \quad (19)$$

Отсюда для частицы со спином в силу полной антисимметрии величины $N^{\mu\nu\lambda}$ имеем:

$$N^{\mu\nu 0} = -\frac{u^\nu}{u^0} N^{\mu 00} = 0. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (19) даёт, наконец,

$$N^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{21}$$

Для точечной частицы $S^{\mu\nu\lambda}$ пропорционально дельта-функции. В силу (14) получаем

$$S^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{22}$$

Интуитивно этот вывод очевиден: если спин подобен угловому моменту, то вращающаяся точка не отличается от невращающейся, и если мы сжали 3-объём в мировую точку (ведь вариация времени положена равной нулю), то мы аннулировали её спин.

Но это условие несовместимо с условием нетривиальности лагранжиана (10) спинорной материи для $\psi \neq 0$. Отсюда следует важный вывод: *однополюсное приближение дираковской частицы не является решением уравнений поля для пространства-времени с кручением.* Тот факт, что в пространстве Римана–Картана в рамках теории Эйнштейна–Картана должно быть $M^{\mu\nu\lambda} \neq 0$, означает, что классическая дираковская частица *не должна быть (сингулярной) точечной частицей.* Интуитивно это довольно очевидно: планковские масштабы заведомо кладут предел применимости концепции пространственно-временного континуума безразмерных мировых точек (напомним, что ньютонова механика оперирует, по сути, именно материальными точками ненулевой массы, и ОТО их наследовала, объединив их энергию и импульс в 4-импульс).

Внутренний угловой момент и спин имеют и в ньютоновой гравитации, и в теории Эйнштейна–Картана отталкивательный потенциал, и решение Копчиньского (9) это подтверждает: влияние спина скорее убывает с расстоянием, чем влияние массы, но быстрее растёт с уменьшением расстояния. Поэтому можно сжать спинирующую среду и фермион только до размера, на котором плотность массы (с линейным по массе вкладом) и плотность спина (с квадратичным по спину вкладом) примерно равны. Это расстояние баланса плотностей массы и спина называется *радиусом Картана.*

В естественных единицах (приняты за единицу (перечёркнутая) постоянная Планка и скорость света) постоянная Ньютона равна обратной величине квадрата планковской массы, и для частицы с массой m и спином s радиус Картана по порядку величины определяется соотношением [2] ($\varkappa$ – постоянная Эйнштейна):

$$\frac{m}{r_c^3} \approx \varkappa \left(\frac{s}{r_c^3}\right)^2. \tag{23}$$

Если мы положим постоянную Ньютона равной единице, то постоянную Планка тогда лучше брать равной квадрату планковской длины, равной примерно $l \approx 1.6 \cdot 10^{-33}$ см, и масса частицы будет соответствовать её геометрическому радиусу (Шварцшильда), что не влияет на результат. Например, для электрона имеем

$$r_c \approx 2.16 \cdot 10^{-25}\text{cm},$$

$$r_c^3 \approx 10^{-76}\text{cm}^3,$$

$$\rho_c \approx m/(4/3)\pi r_c^3 \approx 2.18 \cdot 10^{48}\text{g/cm}^3,$$

$$m = 9.11 \cdot 10^{-28} g = 6.764 \cdot 10^{-56}\text{cm}. \tag{24}$$

Комптоновская длина волны и радиус Картана связаны соотношением $r_c \approx (l^2 \lambda_{\text{Compt}})^{1/3}$.

Радиус Картана для электрона в безразмерных планковских единицах равен примерно $1.35 \cdot 10^8$, что отвечает безразмерному 3-объёму $2.46 \cdot 10^{24}$. Максимальная масса одной объёмной планковской ячейки не может превышать одной планковской массы $2.177 \cdot 10^{-5}$ грамма. Если равенство (23) считать точным и умножить объём *ячейки Картана* на максимальную (планковскую) плотность, то получим минимальную массу электронной (спин электрона в планковских единицах равен 1/2) чёрной дыры (для известной материи она превосходит размеры других чёрных дыр):

$$M_{BHe} = \frac{4}{3}\pi \frac{hc}{Gm_e} \approx 1.18 \cdot 10^{19}\text{g}, \tag{25}$$

$$M_{BHe} = \frac{4\pi c^2}{3G}\lambda_e,$$

$$\lambda_e = h/m_e c = 2.426 \cdot 10^{-10}\,\text{cm}. \tag{26}$$

Здесь в (26) та же масса выражена через (умноженную на 2π) комптоновскую длину волны электрона (можно также выразить знаменатель в (25) через гравитационный радиус этой частицы). Данная оценка совпадает с оценкой Поплавского [2], который не приводит её прямого вывода.

Для нуклона безразмерный объём в 1833 раза меньше, чем для электрона. Вопрос для пар частиц с антипараллельными спинами остаётся открытым (но вряд ли пара частиц может занять меньшее место, чем одна частица), а частицы нулевого спина имеет смысл считать состоящими из частиц с антипараллельными спинами (вспомним, что нейтрон с нулевым электрическим зарядом состоит из трёх электрически заряженных кварков).

Заметим также, что величина радиуса Картана для нуклона равна примерно 10^{-26} см и отвечает энергетическому масштабу великого объединения взаимодействий.

Заключение

В заключение заметим, что постэйнштейновская гравитация уже пришла и, в частности, она изменяет наше представление о чёрных дырах. Обобщение идёт от квантовой механики с её планковскими массами и спином и от идеи калибровочных полей, требующей справедливости полевых уравнений для всё более общих преобразований связности.

Уравнения Эйнштейна определяют ТЭИ для любой гладкой метрики с любой топологией её носителя. Но если мы возьмём, например, мир только с магнитным полем, нам из физических соображений придётся принять во внимание уравнение Дирака для электрона, требование локальной симметрии которого требует введения электромагнитного потенциала и геометризации спина электрона ненулевого размера. Но, строго говоря, если есть электромагнетизм, то есть и гравитация, и слабые и сильные взаимодействия, требующие единого описания на пути обобщения связности многомерного пространства-времени. Ясно, что теория Эйнштейна–Картана, пересматривающая проблему чёрных дыр теории Эйнштейна, является необходимым первым шагом обобщения на этом пути.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Ф. Полищук, Краткие сообщения по физике ФИАН, **38**(2), 38 (2011).

[2] N. J. Poplawski, arXiv:gr-qc/0910.1181, v1 7 Oct 2009.

[3] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[4] D. W. Sciama, On the analogy between charge and spin in general relativity, in: *Recent Developments in General Relativity* (Oxford, Pergamon Press, 1962).

[5] W. Kopczynski, The Palatini principle with constraints, *Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci, math, astr, phys*, **23**, 467 (1975).

[6] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. London **A 209**, 248 (1951).

[7] K. Nomura, T. Shirafuji, and K. Hayashi, Prog. Theor. Phys. **86**, 1239 (1991).

[8] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson, Proc. Roy. Soc. London **A 251**, 519 (1959).

Поступила в редакцию 9 марта 2010 г.

УДК 537.533.9

ГЕНЕРАТОР ПИКОСЕКУНДНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

К. В. Бережной, А. С. Насибов, А. Г. Реутова*, П. В. Шапкин, С. А. Шунайлов*, М. И. Яландин*

Приводятся устройство генератора пикосекундных лазерных импульсов и полученные результаты при возбуждении полупроводниковых мишеней (ZnSe, CdS и др.) импульсами электрического поля и электронного пучка. Максимальная мощность лазерного излучения достигала 10 *кВт при длительности импульсов* 100–200 *пс.*

Ключевые слова: пикосекундные электронные пучки, полупроводниковый лазер.

Развитие сильноточной электроники определило новые возможности генерации пикосекундных импульсов лазерного излучения [1, 2]. Генератор состоит из блока питания, формирующего импульсы высокого напряжения (50–150 кВ) и лазерной головки (ЛГ). При воздействии на рабочее тело полупроводниковой мишени электронным пучком или электрическим полем происходит лавинообразный процесс ионизации атомов решетки, в результате которого образуются электронно-дырочные (e-h) пары. При рекомбинации (e-h) пар возникает излучение, длина волны которого близка к ширине запрещенной зоны. При выполнении определенных требований относительно параметров импульса накачки и исследуемого образца возможны усиление и генерация лазерного излучения. Длительность импульсов регулируется срезающим разрядником (слайсером). ЛГ (рис. 1) изготовлена в виде коаксиальной камеры с волновым сопротивлением $\rho = 75$, которая соединяется с помощью переходного фланца с генератором высоковольтных импульсов. При работе с электронным пучком предусмотрены герметизация камеры, откачка объема и вывод электронного пучка через AlBe фольгу на воздух. При полевой накачке полупроводников, для вывода излучения и замера характеристик во фланце имеется отверстие. Расположение точек, генерирующих излучение на плоскости кристалла, в этом случае обычно носит хаотический характер (рис. 2(а)). По-видимому,

Учреждение Российской академии наук Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Россия 119991, Москва, Ленинский пр. 53, e-mail: nasibov@sci.lebedev.ru.

* Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия.