УДК 533.931

КВАНТОВОЕ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ВЫРОЖДЕННОЙ ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев

Обнаружено, исследовано и объяснено новое явление – квантовое бесстолкновительное затухание ленгмюровских волн в электронной вырожденной плазме. Показано, что квантовое затухание происходит в коротковолновой части спектра, т.е. имеет порог по волновому числу. Найдены численные решения квантового дисперсионного уравнения для комплексных частот ленгмюровских волн. Получены аналитические выражения для частот и декрементов затухания волн в различных диапазонах волновых чисел.

Ключевые слова: ленгмюровские волны, квантовое черенковское излучение и поглощение.

Известно, что в изотропной вырожденной плазме бесстолкновительное затухание (затухание Ландау) ленгмюровских волн полностью отсутствует [1]. Это обусловлено тем, что фазовые скорости волн превышают скорость Ферми $V_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar n_{0e}^{1/3}/m$, а частиц со скоростями больше V_F в полностью вырожденной плазме нет. Например, в электронной вырожденной плазме в коротковолновой области частота ω ленгмюровской волны, называемой нулевым звуком, определяется формулой [2]

$$\omega = kV_F\left[1 + 2\exp\left(-\frac{2}{3}\frac{k^2V_F^2}{\omega_{Le}^2} - 2\right)\right],\ kV_F > \omega_{Le}, \tag{1}$$

где K – волновое число, а $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_{0e}/m}$ – электронная ленгмюровская частота. Поэтому скорость ω/k хотя бы на экспоненциально малую величину, но превышает скорость Ферми. Следовательно условие черенковского резонанса $v = \omega/k$, где $v < V_F$ – скорость электрона, выполнено быть не может, а бесстолкновительное затухание волны происходит именно на электронах, находящихся с волной в условиях черенковского

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Воробьевы горы, 119992 Москва, Российская Федерация; E-mail: kuzelev@mail.ru.

резонанса. При учете квантовых эффектов условие черенковского резонанса при поглощении записывается в виде [3]

$$v = \frac{\omega}{k} - \frac{\omega_\hbar}{k}, \tag{2}$$

где $\omega_\hbar = \hbar k^2/2m$ – важная для дальнейшего квантовая частота. Условие (2), начиная с некоторого k, для спектра (1) легко выполняется, а поэтому возникает бесстолкновительное затухание нулевого звука, имеющее чисто квантовую природу. Рассмотрению этого квантового эффекта посвящена настоящая работа.

Прежде чем изложить основной материал работы, уточним смысл квантового условия черенковского поглощения (2). Пусть электрон при взаимодействии с волной получает от нее энергию $\epsilon > 0$ и импульс $\vec{\pi}$, связанные общим соотношением теории волн $\vec{\pi} = \epsilon\vec{k}/\omega$. Законы сохранения энергии и импульса при поглощении записываются в виде

$$w' = w + \epsilon, \ \vec{p}' = \vec{p} + \vec{\pi}, \tag{3}$$

где $w, \vec{p}$ – энергия и импульс электрона до взаимодействия с волной, а $w', \vec{p}'$ – те же величины после взаимодействия. Учитывая, что $w = p^2/2m$, $w' = p'^2/2m$ и $\vec{p} = m\vec{v}$, из соотношений (3) находим

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = \frac{\epsilon k^2}{2m\omega}. \tag{4}$$

Если теперь положить $\epsilon = \hbar\omega$ и $\vec{k}\vec{v} = kv$, то формула (4) перейдет в условие (2). Таким образом квантовая поправка в условии поглощения (2) связана с конечностью энергии ϵ, передаваемой от волны электрону. Имеется и обратный процесс – квантовое черенковское излучение, условие которого имеет вид (4), но со знаком минус перед правой частью. Ниже учитываются оба процесса, как поглощение, так и излучение.

Исходим из известного дисперсионного уравнения для определения частоты ω продольных ленгмюровских колебаний квантовой плазмы [1, 2]

$$1 - \omega_{Le}^2 \int \frac{f_0(\vec{p})d\vec{p}}{(\omega - \vec{k}\vec{v})^2 - \omega_\hbar^2} = 0, \tag{5}$$

где $f_0(\vec{p})$ – функция распределения электронов по импульсам. Интегрирование в (5) осуществляется по контуру, определяемому правилом Ландау. Перейдем от интегрирования по импульсу к интегрированию по скорости $\vec{v}$, координатную ось z направим вдоль вектора $\vec{k}$, т.е. положим $\vec{k} = \{0, 0, k\}$, и выполним интегрирование по v_x и v_y. В результате получим

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}_0(v_z)dv_z}{(v_z - v_1)(v_z - v_2)} = i\pi \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \frac{\tilde{f}_0(v_1) - \tilde{f}_0(v_2)}{\omega_\hbar/k}. \tag{6}$$

Здесь $v_{1,2} = \omega/k \pm \omega_\hbar/k$, а $\tilde{f}_0(v_z)$ – функция, получающаяся интегрированием функции $f_0(\vec{v})$ по v_x и v_y. Интегрирование в (6) осуществляется вдоль действительной оси. Правая часть уравнения (6) описывает бесстолкновительное затухание волн в квантовой плазме. Электроны, у которых $v_z \approx v_1$, излучают плазменную волну. Механизмом является черенковское излучение. Электроны, у которых $v_z \approx v_2$, поглощают плазменную волну – механизм черенковский. В целом, в квантовой плазме, как и в классическом случае, бесстолкновительное затухание обусловлено конкуренцией процессов излучения и поглощения. При $\omega_\hbar \to 0$ квантовое дисперсионное уравнение переходит в классическое дисперсионное уравнение плазменных волн теории Власова–Ландау [2].

Если правая часть уравнения (6) мала, то для мнимой части частоты из (6) имеем

$$\mathrm{Im}\omega = i\pi \frac{\omega_{Le}^2}{k^2} \left(\frac{\partial D(\omega_0)}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\tilde{f}_0(\omega_0/k + \omega_\hbar/k) - \tilde{f}_0(\omega_0/k - \omega_\hbar/k)}{\omega_\hbar/k}, \tag{7}$$

где ω_0 – действительная часть частоты, а $D(\omega)$ – левая часть уравнения (6). В классическом пределе из (7) получается известная формула для декремента затухания Ландау ленгмюровских волн [2].

В случае вырожденной плазмы

$$\tilde{f}_0(v_z) = \frac{3}{4V_F} \left(1 - \frac{v_z^2}{V_F^2} \right), \ v_z^2 \le V_F^2, \tag{8}$$

(при $v_z^2 > V_F^2$ имеем $\tilde{f}_0(v_z) \equiv 0$) и уравнение (6) преобразуется к следующему виду:

$$1 + \frac{3}{4\kappa^2} \left[2 + \frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1 - \xi_2} \ln \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} + \frac{\xi_2^2 - 1}{\xi_2 - \xi_1} \ln \frac{\xi_2 - 1}{\xi_2 + 1} \right] = \tag{9}$$

$$= -i \frac{3\pi}{4} \frac{(\xi_1^2 - 1)\theta(\xi_1) - (\xi_2^2 - 1)\theta(\xi_2)}{\mu\kappa},$$

где

$$\xi_{1,2} = \frac{\Omega}{\kappa} \pm \frac{\mu}{\kappa}, \ \theta(\xi) = \begin{cases} 0, & (\mathrm{Re}\xi)^2 > 1 + (\mathrm{Im}\xi)^2 \\ 1, & (\mathrm{Re}\xi)^2 \le 1 + (\mathrm{Im}\xi)^2. \end{cases} \tag{10}$$

В (9) и (10) использованы безразмерные величины

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{Le}}, \ \kappa = \frac{kV_F}{\omega_{Le}}, \ \mu = \frac{\omega_\hbar}{\omega_{Le}} = \frac{1}{4}\eta\kappa^2, \tag{11}$$

а

$$\eta = \frac{\hbar\omega_{Le}}{\epsilon_F} \approx \left(\frac{e^2 n_{0e}^{1/3}}{\epsilon_F} \right)^{1/2} \tag{12}$$

– газовый параметр. Основное условие применимости исходного дисперсионного уравнения (5) сводится к малости газового параметра (12) [1, 2].

Правая часть уравнения (9) возникла из-за применения правила Ландау: она равна сумме интегралов по замкнутым контурам вокруг полюсов $\xi = \xi_{1,2}$, лежащих в нижней полуплоскости комплексной плоскости $\xi = v_z/V_F$ вне области, где функция распределения (8) равна нулю, что учитывается множителями $\theta(\xi_{1,2})$.

Квантовые эффекты тем сильнее, чем больше параметр μ в (11), поэтому проявляться они должны в достаточно коротковолновой области, при $\kappa > 1$. Имеется, однако, ограничение на величину безразмерного волнового числа κ. Рассмотрим еще один параметр

$$\frac{\mu}{\kappa} = \frac{\omega_\hbar}{kV_F} \approx \frac{\langle r \rangle}{\lambda}, \tag{13}$$

где $\lambda = 2\pi/k$ – длина ленгмюровской волны, а $\langle r \rangle = n_{0e}^{-1/3}$ – среднее расстояние между электронами. В случае ленгмюровских волн, обусловленных нарушением квазинейтральности в объемах, содержащих большое число частиц, отношение (13) мало по определению. Поэтому необходимо иметь в виду ограничение $\mu/\kappa = \eta\kappa/4 < 1$ (а также $\eta < 1$).

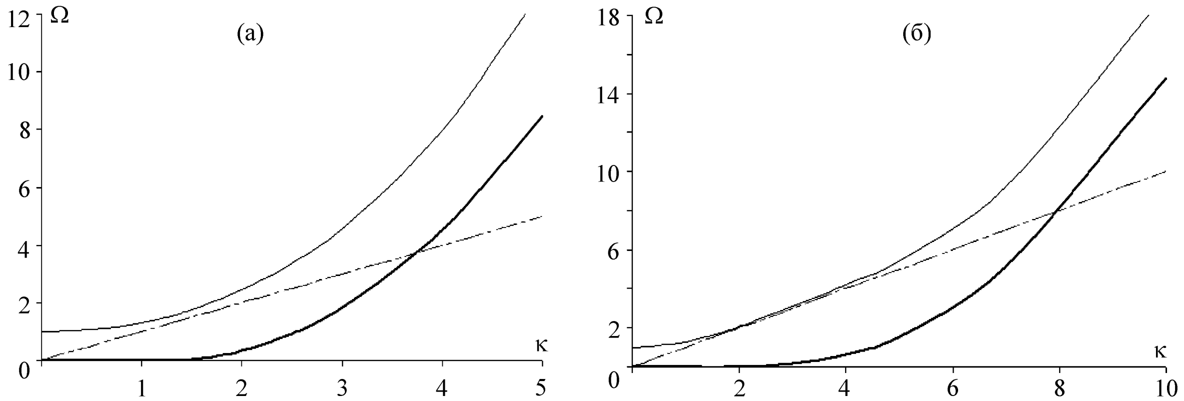

Рис. 1: *Результаты решения дисперсионного уравнения (9): (а) – $\eta = 0.5$, (б) – $\eta = 0.05$; Re Ω – обычная линия, $|Im\omega|$ – жирная линия, линия нулевого звука $\Omega = \kappa$ – штрих-пунктир.*

Рассмотрим вначале результаты численного решения уравнения (9). На рис. 1 для двух случаев $\eta = 0.5$ (рис. 1(а)) и $\eta = 0.05$ (рис. 1(б)) изображены действительная и мнимая части безразмерной комплексной частоты $\Omega(\kappa)$ и прямая нулевого звука $\Omega = \kappa(\omega = kV_F)$. Как видно из определения квантового параметра μ, при одном и

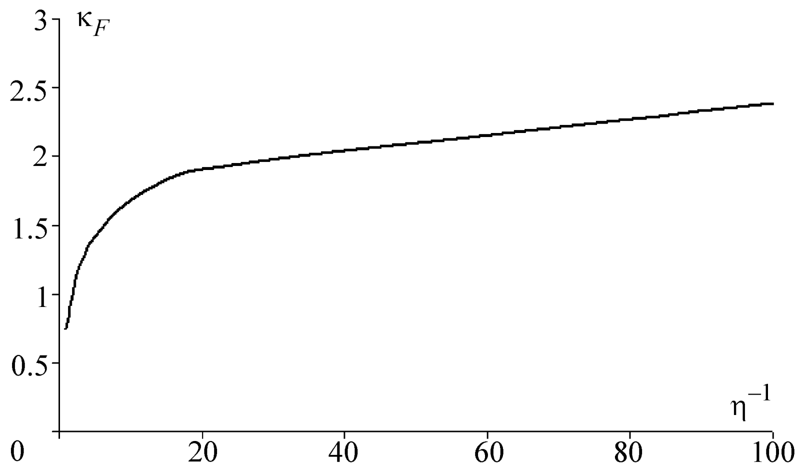

Рис. 2: *Безразмерное пороговое волновое число в зависимости от обратного газового параметра.*

том же значении κ квантовые эффекты тем сильнее, чем больше газовый параметр η. На рис. 1 можно выделить три характерные области: первая – длинноволновая область незатухающих ленгмюровских волн; вторая – промежуточная область (вблизи порога возникновения затухания) слабозатухающей волны типа нулевого звука; третья – коротковолновая область сильнозатухающих колебаний, которые к волновым возмущениям можно отнести только условно. Вторая промежуточная область видна тем отчетливее, чем меньше параметр η (т.е. чем меньше квантовые эффекты), что видно из сравнения рис. 1(а) и рис. 1(б). Третья область существенно квантовая, она может быть продолжена в область еще более коротких длин волн, вплоть до $\kappa \sim 4/\eta$ (когда параметр (13) приближается к единице).

Для трех указанных характерных областей удается найти приближенные аналитические решения дисперсионного уравнения (9). В первой длинноволновой области имеем известный спектр [1, 2] (приводим в безразмерной и размерной формах)

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{3}{5}\kappa^2 + \frac{1}{16}\eta^2\kappa^4} \to \omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \frac{3}{5}k^2V_F^2 + \left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right)^2}. \qquad (14)$$

В третьей коротковолновой области комплексный спектр сильнозатухающих квантовых колебаний оказывается следующим:

$$\Omega = \mu + \sqrt{\frac{2}{3\pi}}(1-i)\sqrt{\mu\kappa}\kappa \to \omega = \omega_\hbar + \sqrt{\frac{2}{3\pi}}(1-i)\left(\frac{\omega_\hbar k V_F}{\omega_{Le}^2}\right)^{1/2} kV_F. \qquad (15)$$

При получении формулы (15) было учтено, что в коротковолновой области правая часть уравнения (9) является большой по абсолютной величине.

Для решения дисперсионного уравнения (9) в промежуточной области волновых чисел удобно воспользоваться приближенной формулой (7), поскольку вблизи порога затухания мнимая часть у частоты мала. Предварительно следует определить пороговое значение, обозначим его κ_F. Сделаем это для почти классического случая $\eta \ll 1$, когда безразмерное волновое число $\kappa \sim \kappa_F$ достаточно велико. Приравнивая левую часть уравнения (9) нулю, находим известное выражение для действительной частоты нулевого звука

$$\Omega = \kappa \left[1 + 2\exp\left(-\frac{2}{3}\kappa^2 - 2\right)\right] \tag{16}$$

или в размерном виде (1). Подставляя далее (16) в условие черенковского поглощения, получаем следующее уравнение для определения порогового волнового числа κ_F:

$$F(\kappa) \equiv \eta\kappa - 8\exp\left(-\frac{2}{3}\kappa^2 - 2\right) = 0. \tag{17}$$

Решение уравнения (17) показано на рис. 2. Напомним, что затухание возникает при $\kappa > \kappa_F$, или в размерном виде при $k > \kappa_F \omega_{Le}/V_F$. Наконец, подставляя (16) в формулу (3.6), находим выражение для декремента затухания нулевого звука в вырожденной плазме

$$\mathrm{Im}\Omega = -i\frac{\pi}{8}\kappa F(\kappa) \to \mathrm{Im}\omega = -i\frac{\pi}{2}kV_F\left[\frac{\omega_\hbar}{kV_F} - 2\exp\left(-\frac{2}{3}\frac{k^2V_F^2}{\omega_{Le}^2} - 2\right)\right]. \tag{18}$$

Формула (18) справедлива только при $\kappa > \kappa_F$; при $\kappa < \kappa_F$ следует полагать $\mathrm{Im}\ \omega \equiv 0$. Приближенные формулы (14)–(18) хорошо согласуются с результатами численного решения дисперсионного уравнения (9).

В заключение выскажем предположение о структуре частотных спектров рассмотренных ленгмюровских волн в еще более коротковолновой области, когда параметр (13) является большим и представление о самосогласованном поле становится некорректным. В этом случае взаимодействие электронов плазмы происходит только за счет столкновений. Если же таковые отсутствуют, то частота продольных квантовых колебаний плазмы определяется формулой

$$\omega = \omega_\hbar. \tag{19}$$

В отличие от коллективных ленгмюровских колебаний волны (19) являются одночастичными [1, 2]. Таким образом при увеличении волнового числа k формула (15) предположительно изменяется следующим образом: начиная с некоторого k, второе слагаемое престает нарастать, а затем вообще уменьшается до нуля.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М., Атомиздат, 1961).

[2] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе, *Лекции по электродинамике плазмоподобных сред* (М., Изд-во Московского университета, 1999), 336 с.

[3] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **178**(10), 1025 (2008).

Учреждение Российской академии наук
Институт общей физики
им. А. М. Прохорова РАН

Поступила в редакцию 23 октября 2009 г.