

# ВИХРЕВЫЕ КОЛЬЦА И ПЛАЗМЕННЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ ВИХРИ В ОДНОРОДНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ. I. МАКСИМАЛЬНЫЙ ПУТЬ, ПРОХОДИМЫЙ ВИХРЯМИ

У. Юсупалиев, С. А. Шутеев<sup>1</sup>, Е. Э. Винке<sup>1</sup>, П. У. Юсупалиев<sup>1</sup>

*Экспериментально определен максимальный путь  $L_{\text{МАХ}}$ , проходимый вихревыми кольцами (тороидальными вихрями) в воздухе и воде до начала их распада, в широком диапазоне изменения их начальных интегральных характеристик. Из законов движения и изменения энергии таких вихрей получена формула для величины  $L_{\text{МАХ}}$  в зависимости от их начальных характеристик. Показано, что эта формула удовлетворительно согласуется с опытными данными.*

**Ключевые слова:** вихревое кольцо, тороидальный вихрь, коэффициент сопротивления.

*Введение.* Одной из основных характеристик вихревого кольца (низкотемпературного тороидального вихря), движущегося в однородной среде (воздухе и воде при атмосферном давлении, температуре  $\sim 293$  К), является пройденное им расстояние  $L_{\text{МАХ}}$  до своего распада. Несмотря на давнюю историю исследования вихревого кольца [1–17], величина  $L_{\text{МАХ}}$  экспериментально впервые была измерена в широких пределах изменения характеристик генераторов вихря только в 1975 году автором работы [8], т.е. спустя почти 100 лет после работы О. Рейнольдса [1]. Опытные данные этой работы по измерению величины  $L_{\text{МАХ}}$ , начального радиуса  $R_0$ , начальной скорости поступательного движения  $V_0$  и угла расширения радиуса  $\alpha$  таких вихрей приведены в таблице 1 (строки с 1 по 5). Определения основных характеристик тороидального вихря даны на рис. 1. На опыте число Рейнольдса вихревых колец  $Re_0$ , составленное из величин  $V_0, R_0$ , кинематической вязкости воздуха и воды, варьировалось в интервале  $10^3 - 6 \cdot 10^5$ . Исходя

---

Учреждение Российской академии наук Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38, Россия.

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва, e-mail: pesu@phys.msu.ru

из опытных данных, в этой же работе предложена следующая эмпирическая формула для величины  $L_{\text{MAX}}$ :

$$\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0} \approx 10 \cdot Re_0^{1/3}. \quad (1)$$

В условиях работы [8] число  $R_0$  в основном изменялось путем варьирования значения скорости  $V_0$ , величина которой не превышала 125 м/с. Из (1) следует, что чем больше число  $Re_0$ , тем больше должна быть величина максимального проходимого вихрем пути  $L_{\text{MAX}}$ . Однако в [18] экспериментально показано, что при скоростях высокотемпературного (плазменного) тороидального вихря (светящегося вихревого кольца)  $V_0 \geq 140 - 160$  м/с ( $Re_0 > 10^6$ ) сила сопротивления, действующая на вихрь со стороны обтекающего потока, растет вследствие появления за вихрем турбулизованного потока воздуха. Тороидальный вихрь (ТВ) с такой скоростью быстро тормозится окружающей средой, что приводит к существенному уменьшению величины  $L_{\text{MAX}}$ , несмотря на рост числа  $Re_0$ . Таким образом, эмпирическая формула (1) при больших числах  $Re_0$  противоречит опытным данным.

В этой работе также показано, что низкотемпературные тороидальные вихри (турбулентные вихревые кольца) в однородных средах (в воздухе [6, 8] и воде [8, 11]) и высокотемпературные (плазменные) тороидальные вихри в воздухе [19–22] имеют идентичные динамические свойства. Исходя из этого экспериментального факта, автор работ [18, 19] определил силы, действующие на такие вихри в однородной безграничной среде, и вывел уравнение движения их центра масс. Получено решение этого уравнения – закон движения тороидального вихря:

$$z(t) = \frac{R_0}{\alpha} \left\{ \left\langle 1 + [b + 4]\alpha \frac{V_0}{R_0} t \right\rangle^{\frac{1}{b+4}} - 1 \right\}, \quad (2)$$

а также закон изменения скорости его поступательного движения:

$$V_Z(t) = V_0 \left\{ 1 + [b + 4]\alpha \frac{V_0}{R_0} t \right\}^{\frac{-b-3}{b+4}} \quad (3)$$

и закон изменения его радиуса:

$$R(t) = R_0 \left\{ 1 + [b + 4]\alpha \frac{V_0}{R_0} t \right\}^{\frac{1}{b+4}}, \quad (4)$$

где  $z(t)$  – зависимость пройденного вихрем пути от времени  $t$ ,  $b = \frac{3C_Z}{2\alpha} \left( \frac{\rho_0}{\rho_{av}} \right)$ ,  $\rho_{av}$  – средняя плотность жидкости (плазмы, газа и жидкости) в вихре,  $C_Z$  и  $\alpha$  – коэффициент лобового сопротивления и угол расширения радиуса вихря соответственно (см.

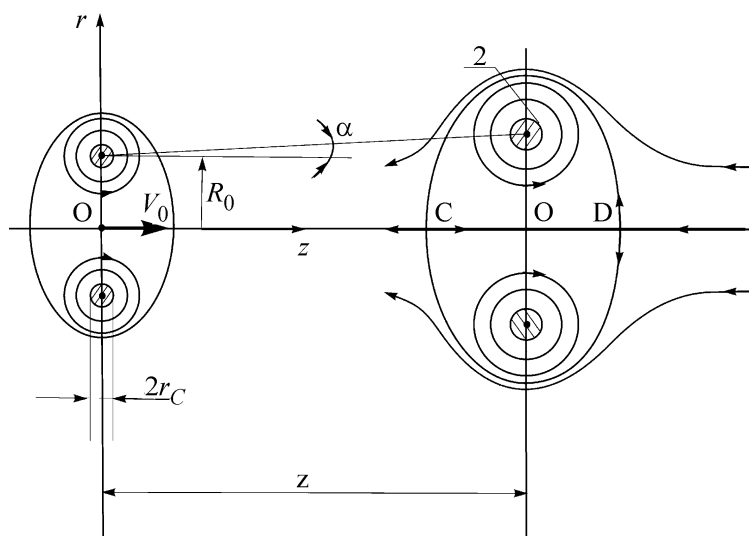


Рис. 1: Картина линий тока тороидального вихря (ТВ) в системе координат вихря к моменту завершения его формирования и в произвольный момент времени его движения в однородной среде с координатой  $z$ . Цилиндрическая система координат выбрана так, что её плоскость  $z = 0$  совпадает с главной плоскостью тора в момент завершения формирования вихря, а ось  $Oz$  – с осью симметрии тора. Направление оси  $Oz$  совпадает с направлением скорости поступательного движения ТВ  $V_z$ . Внутри атмосферы вихря жидкость движется по замкнутым линиям тока (внутри замкнутой линии DCOD).  $r_C$  – радиус твердотельного ядра вращения жидкости.

рис. 1),  $\rho_0$  – плотность окружающей среды. Направление поступательного движения центра масс ТВ совпадает с осью  $Oz$  цилиндрической системы координат, связанной с неподвижной окружающей средой (рис. 1).

В этих работах также показано, что решение (2) удовлетворительно согласуется с опытными данными как для плазменного ТВ в воздухе [18–21], так и для вихревых колец в воздухе [6, 8] и воде [8, 11] при атмосферном давлении до момента возникновения их неустойчивостей. На основании полученного решения (2) и экспериментальных данных определен коэффициент лобового сопротивления  $C_Z$  таких вихрей. При одинаковых числах Рейнольдса величина  $C_Z$  для тороидального вихря может быть существенно меньше (более чем на порядок), чем соответствующий коэффициент, равный 0.045, для каплевидного тела вращения – наиболее обтекаемого объекта.

Сравнение теоретической кривой (2) с опытными данными для вихревых колец в воздухе и воде показало, что величина безразмерного параметра  $b$  для таких вихрей

имеет значение порядка  $A \approx 1.5$ . Из этого факта получена следующая формула для величины  $C_Z$ :

$$C_Z \approx A \frac{2}{3} \left( \frac{\rho_{av}}{\rho_0} \right) \alpha. \quad (5)$$

Т а б л и ц а 1

№	Агрегатное состояние тороидального вихря и среды	Диаметр сопла генератора тороидального вихря $2R^*$ , см	$R_0$ , см	$V_0$ , м/сек	$Re_0$	$L_{MAX}$ , м	$\frac{L_{MAX}}{R_0}$	$\alpha$ , рад	Коэффициент сопротивления ТВ, $C_Z$	Лит
1	вода-вода	1	0.54	1.5	$8.1 \times 10^3$	1.2–1.4	222–260	$8 \times 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	[8]
2	воздух-воздух	3	2	6	$8 \times 10^3$	4–5	200–250	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	[8]
3	воздух-воздух	4.2	3.4	125	$2.83 \times 10^5$	25–30	735–880	$3 \times 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	[8]
4	воздух-воздух	100	60	6	$2.4 \times 10^5$	260	430	$6 \times 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	[8]
5	воздух-воздух	30	19	50	$6.33 \times 10^5$	120–130	630–680	$4 \times 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	[8]
6	вода-вода	3.4*	1.5	1.1		3.0–3.5	200–233	$1.0 \times 10^{-2}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	
7	воздух-воздух	5.0**	2.5	8		13–14	520–560	$4.2 \times 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	
8	воздух-воздух	4.0	2.0	43		17	750–850	$3.3 \times 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	
9	воздух-воздух	6.0	3.2	65		30–36	930–1125	$2.5 \times 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	

\* – генератор вихря в бассейне;

\*\* – генератор вихря – ящик Вуда.

В рамках модели, предложенной в [18], коэффициент лобового сопротивления тороидального вихря  $C_Z$ , оказывается прямо пропорционален углу расширения его радиуса

$\alpha$ , что согласуется с опытными данными [6, 8, 10, 11, 17, 18–22]: чем меньше угол расширения радиуса вихря  $\alpha$ , тем меньше коэффициент сопротивления  $C_Z$ .

Для условий работы [8] значения коэффициента сопротивления вихрей  $C_Z$  определялись нами по формуле (5), так как автор этой работы считал, что импульс вихревого кольца при его движении остается постоянным, т.е. на вихрь не действует сила сопротивления со стороны окружающей среды ( $C_Z = 0$ ). А постоянство импульса вихря является основным предположением автомодельной теории движения турбулентного вихревого кольца [5, 6]. Однако опыт показывает обратное [18]: при движении вихря его импульс со временем уменьшается. Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса вихря происходит в результате действия на него сил, возникающих при взаимодействии вихря с окружающей средой и диаметрально противоположных его элементов между собой [18, 19, 24–25]. Из постоянства импульса ТВ следует, что путь, проходимый вихрем, может быть сколь угодно большим ( $L_{\text{MAX}} \rightarrow \infty$ ). А это (основное предположение автомодельной теории [5, 6]) противоречит опытными данным.

Использование ТВ для решения прикладных задач требует, чтобы пройденный им путь был максимальным. Однако имеющиеся как экспериментальные данные [6–12, 15, 17, 18–26], так и теоретические модели [5, 6, 13, 14, 16, 18] по исследованию тороидальных вихрей не позволяют определить величину  $L_{\text{MAX}}$ . Данная работа посвящена количественному определению этой величины в зависимости от характеристик тороидального вихря и среды.

*1. Экспериментальная установка и методики измерения.* Экспериментальная установка, генераторы тороидальных вихрей (вихревых колец) в воздухе и воде, методики измерения основных их характеристик подробно описаны в работах [18, 25, 26]. Измерение величины  $L_{\text{MAX}}$  для воздушного ТВ производилось следующим образом. Ось генератора такого вихря была ориентирована перпендикулярно к марлевой шторке размерами  $3 \times 5$  м. Сначала расстояние между генератором ТВ и марлевой шторкой фиксировалось. Дошел ли вихрь до шторы или нет, было видно по её колебаниям. Расстояние, на котором прекращались колебания шторы, выбиралось в качестве максимального пути  $L_{\text{MAX}}$ , как это делалось в работе [8]. Для визуализации вихря в воздухе (воде) в рабочий объем генератора вихря вводился дым (чернила), и основные характеристики вихря регистрировались видеокамерой. При этом в качестве максимального пути вихря  $L_{\text{MAX}}$  выбиралось расстояние от генератора вихря, при котором вихревое кольцо начало распадаться вследствие возникновения его неустойчивостей. Эти неустойчивости

проявляются в виде колебаний вихревого кольца в радиальном и аксиальном направлениях.

2. *Экспериментальные результаты.* В таблице 1 приведены величины  $V_0$ ,  $L_{\text{MAX}}$ ,  $\alpha$  и коэффициент сопротивления  $C_Z$  тороидального вихря в воздухе и воде при атмосферном давлении, полученные нами (строки с 6 по 9). Коэффициент сопротивления вихря  $C_Z$  определялся по формуле (5). Выборка из всего массива опытных данных для таблицы 1 определялась тем, что величина коэффициента сопротивления  $C_Z$  должна быть минимальной. Один из основных выводов работы [18] состоит в экспериментальном доказательстве прямо пропорциональной зависимости коэффициента сопротивления ТВ  $C_Z$  от величины угла расширения вихря  $d$  (соотношение (5)). Из этого факта следует, что чем меньше угол  $\alpha$ , тем меньше  $C_Z$ , а следовательно, больше пройденный вихрем путь. А в работе [24] экспериментально определены условия, при которых величина угла  $\alpha$  минимальна в зависимости от длины импульсной струи (скорости и длительности истечения струи – характеристик генератора вихря). Для достижения максимального значения пути, проходимого вихрем, мы руководствовались именно этими закономерностями.

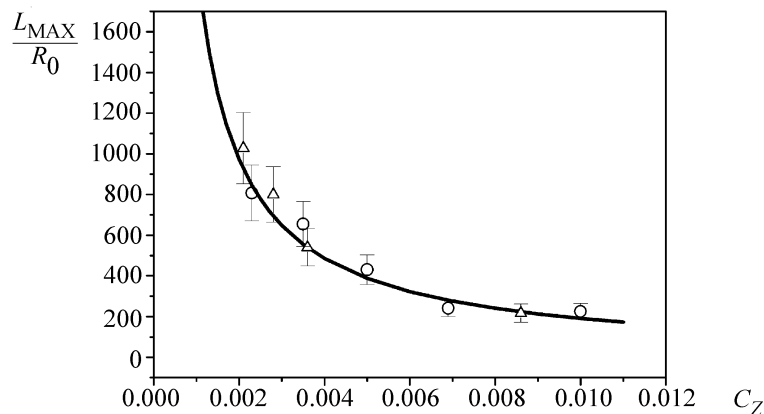


Рис. 2: Зависимость относительного максимального пути  $\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0}$ , пройденного тороидальными вихрями в воздухе и воде до момента их распада, от коэффициента их сопротивления  $C_Z$ . Кружочки  $\circ$  – экспериментальные данные работы [8], треугольники  $\Delta$  – экспериментальные данные настоящей работы. Кривая построена по формуле (15).

На рис. 2 приведена экспериментальная зависимость относительного максимального пути  $\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0}$ , пройденного тороидальными вихрями в воздухе и воде до их момента

распада, от коэффициента их сопротивления  $C_Z$ . Из приведённых экспериментальных данных (таблицы 1 и рис. 2) следует однозначная связь между величинами  $L_{\text{МАХ}}$ ,  $R_0$  и  $C_Z$ : чем меньше коэффициент его лобового сопротивления  $C_Z$  и больше начальный радиус вихря  $R_0$ , тем больше расстояние  $L_{\text{МАХ}}$ , проходимое вихрем до своего распада.

3. *Обсуждение экспериментальных результатов.* Для определения величины  $L_{\text{МАХ}}$  воспользуемся результатами работ [18, 19]: законом движения вихря (2), (3), (4) и (5). В общем случае низкотемпературный ТВ имеет кинетическую энергию  $E_C$  поступательного движения относительно покоящейся среды, вращательную энергию вещества (газа или жидкости)  $E_{\text{rot}}$  относительно его оси ядра тора – оси вращения, внутреннюю энергию его вещества  $E_{\text{in}}$ , захваченного в вихревое движение:

$$E_{\text{ТВ}} = E_C + E_{\text{rot}} + E_{\text{in}}. \quad (6)$$

В работах [15, 17] экспериментально показано, что на начальной стадии движения воздушного ТВ (после его формирования) энергия его вращательного движения  $E_{\text{rot}}$  примерно в три раза превышает его кинетическую энергию поступательного движения  $E_C$ :

$$E_{\text{rot}} \approx 3E_C = 2\pi\rho_{\text{ав}}R_0^3V_0^2. \quad (7)$$

Будем предполагать, что соотношение (7) выполняется и для тороидального вихря в воде. При движении у такого низкотемпературного ТВ внутренняя энергия его вещества не изменяется ( $E_{\text{in}} \approx \text{const}$ ), так как средняя температура вихря практически не отличается от температуры окружающей среды. То есть градиентом температуры в вихре (как и потоком тепла из вихря) можно пренебречь, чего нельзя сказать о высокотемпературном (плазменном) ТВ (начальная температура плазмы составляет 8000–9000 К [18]). Тогда изменение энергии вихря в единицу времени равно мощности сил, действующих на вихрь:

$$\frac{dE_{\text{ТВ}}(t)}{dt} = -F_F(t) \cdot V_Z(t) - (F_M(t) - F_{\Pi}(t)) \cdot V_r(t) \quad (8)$$

с начальными условиями

$$E_{\text{ТВ}}(0) = E_C(0) + E_{\text{rot}}(0), V_Z(0) = V_0, V_r(0) = \alpha \cdot V_0, R(0) = R_0,$$

где  $F_F$  – сила сопротивления, действующая на вихрь со стороны окружающей среды против направления поступательного движения вихря,  $F_M - F_{\Pi} = 2\pi R(f_M - f_{\Pi})$ ,  $f_M$  и  $f_{\Pi}$  – сила растяжения и сила притяжения, действующие на элемент вихря единичной длины (см. рис. 1),  $V_Z(t)$  – скорость поступательного движения вихря,  $V_r(t)$  – радиальная

скорость расширения вихря. Скорости  $V_Z(t)$  и  $V_r(t) = dR(t)/dt$  связаны между собой соотношением:  $V_r(t) = \alpha V_Z(t)$ , которое получено из следующего соотношения

$$R(t) = R_0 + \alpha z(t), \quad (9a)$$

установленного экспериментально в работах [6, 8, 10, 11, 15, 17, 18]. Заметим, что соотношение (9a) справедливо до момента возникновения неустойчивостей вихря. В [18, 19] показано, что силы  $F_F$  и  $(F_M - F_{\Pi})$  равны соответственно:

$$F_F = C_Z \frac{\rho_0 V_Z^2}{2} S_M, F_M - F_{\Pi} = 2\pi R(f_M - f_{\Pi}) = \alpha C_Z \frac{\rho_0 V_Z^2}{2} S_M, \quad (9b)$$

где  $S_M = 4\pi R^2$  – миделево сечение ТВ.

Интегрирование уравнения (8) с начальными условиями и с учетом (3), (4) и (9b) дает работу  $A_{TV}$ , совершаемую тороидальным вихрем на преодоление сопротивления окружающей среды:

$$\begin{aligned} E_{TV}(0) - E_{TV}(t) = A(t) &= \int_0^t F_F(\xi) V_Z(\xi) d\xi + \int_0^t (F_M(\xi) - F_{\Pi}(\xi)) V_r d\xi = \\ &= 2\pi \rho_0 C_Z (1 + \alpha^2) \int_0^t V_Z^3(\xi) R^2(\xi) d\xi = \\ &= \frac{2\pi(1 + \alpha^2) C_Z \rho_0 R_0^3 V_0^2}{\alpha(2b + 3)} \left[ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + (b + 4) \frac{\alpha V_0 t}{R_0} \right]^{\frac{2b+3}{b+4}}} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) в работе [26] получена формула для доли энергии  $\frac{A(t_{2R})}{E_{TV}(0)}$ , теряемой вихрем на преодоление сопротивления окружающей среды при прохождении им пути, равного своему диаметру. Полученная формула сравнивалась с опытными данными работ [15, 17], и было показано, что она согласуется с опытными данными. Поэтому уравнение (10) с учетом условия возникновения неустойчивостей ТВ [24] можно использовать для определения максимального проходимого тороидальным вихрем расстояния  $L_{\text{MAX}}$ .

Для этого сначала определим время жизни ТВ  $\tau_{\text{LIF}}$  как время до начала его распада. Распад вихря происходит в результате возникновения его неустойчивостей. До момента распада вихрь на преодоление сопротивления окружающей среды расходует определенную долю своей энергии  $\eta$ :

$$A(\tau_{\text{LIF}}) = \eta E_{TV}(0), \quad (11)$$



где  $0 < \eta < 1$ . Подставляя выражение (10) при  $t = \tau_{\text{LIF}}$  в (11), получим характерное время жизни ТВ:

$$\tau_{\text{LIF}} = \frac{R_0}{(b+4)\alpha V_0} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{4\eta E_{\text{TV}}(0)}{\Pi \rho_0 R_0^3 V_0^2}\right)^{\frac{b+4}{2b+3}}} - 1 \right], \quad (12)$$

где  $\Pi = \frac{2\pi(1+\alpha^2)C_Z}{\alpha(2b+3)}$ . Теперь для определения величины пути  $L_{\text{MAX}}$  выражение (12) подставим в закон движения вихря (2) и получим следующее выражение для  $L_{\text{MAX}}/R_0$ :

$$\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \left\langle 1 + \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{4\eta\alpha E_{\text{TV}}(0)}{\Pi \rho_0 R_0^3 V_0^2}\right)^{\frac{b+4}{2b+3}}} - 1 \right] \right\rangle^{\frac{1}{b+4}} - 1 \right\}. \quad (13)$$

Итак, путь, проходимый тороидальным вихрем до своего распада, зависит от его начальной механической энергии  $E_{\text{TV}}(0)$ , начального радиуса  $R_0$  и коэффициента сопротивления вихря  $C_Z$ .

Используя (5) и (7), выражение (13) приведём к следующему виду:

$$\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0} = \frac{2A\rho_{av}}{3\rho_0 C_Z} \left\{ \left\langle 1 + \left[ \left(1 + \frac{2\eta(2b+3)}{A \left(1 + \frac{9\rho_0^2}{4A^2 \rho_{av}^2} C_Z^2\right)}\right)^{\frac{-(b+4)}{2b+3}} - 1 \right] \right\rangle^{\frac{1}{b+4}} - 1 \right\}. \quad (14)$$

В (14) неизвестна средняя плотность газа  $\rho_{av}$  внутри вихря. Вследствие вращения внутри вихря имеется разрежение газа, следовательно, по крайней мере для газа,  $\rho_{av} < \rho_0$ . Оценка величины  $\rho_{av}$  для параметров ТВ, приведённых в таблице 1, показывает, что при малых начальных скоростях вихря ( $V_0 < 10$  м/с) она близка к плотности окружающей среды ( $0.93\rho_0 < \rho_{av} \leq \rho_0$ ), а при  $10 \text{ м/с} < V_0 < 125 \text{ м/с}$  —  $0.7\rho_0 < \rho_{av} < 0.9\rho_0$ . Поэтому для проведения расчёта по формуле (14) в интервале  $1 \text{ м/с} \leq V_0 \leq 125 \text{ м/с}$  можно принять, что  $\rho_{av} \approx 0.8\rho_0$ .

Согласно опытным данным [18],  $b \approx A = 1.5$ , и тогда из (14) получим

$$\frac{L_{\text{MAX}}}{R_0} = \frac{\rho_{av}}{\rho_0 C_Z} \left\{ \left\langle 1 + \left[ \left(1 + \frac{8\eta}{\left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho_{av}^2} C_Z^2\right)}\right)^{-0.92} - 1 \right] \right\rangle^{0.182} - 1 \right\}. \quad (15)$$

В (15) неизвестна величина  $\eta$ . Для её оценки строились кривые по формуле (15) при различных значениях  $\eta$ . Сравнение этих кривых с опытными данными работы [8] и

нашей работы показало, что при  $\eta = 0.16$  кривая хорошо согласуется с этими данными (см. рис. 2).

Таким образом, формула (15), полученная из законов движения и изменения энергии тороидальных вихрей в воздухе и воде с учётом момента их распада, адекватно описывает экспериментально установленную зависимость максимального проходимого ими пути от их коэффициента сопротивления  $C_Z$  и начального радиуса  $R_0$ .

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] O. Reynolds, Nature **14**, 477 (1876).
- [2] R. Wood, Nature **63**, 418 (1901).
- [3] Н. Е. Жуковский, *Заметка о движении вихревых колец* (М., Моск. универс., 1907).
- [4] R. H. Magarvey, C. S. MacLachy, Canad. J. Phys. **42**(4), 678 (1964).
- [5] Б. А. Луговцов, Автореф. дис. на соиск. д.ф.-м.н. (Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1973).
- [6] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* (М., Наука, 1973).
- [7] J. P. Sullivan, S. E. Windall, S. Ezekiel, AIAA J **11**, 1384 (1973).
- [8] В. Ф. Тарасов, Дис. на соиск. к.ф.-м.н. (Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1975).
- [9] T. Maxworthy, J. Fluid Mech. **81**, part 3, 465 (1977).
- [10] K. Shariff, M. Leonard, Ann. Rev. Fluid Mech. **24**, 235 (1992).
- [11] В. И. Бояринцев, Т. Е. Бояринцева, Д. Г. Коротчаев и др., Изв. РАН Сер. МЖГ № 3, 125 (1997).
- [12] M. Gharib, E. Rambod, K. Shariff, J. Fluid Mech. **360**, 121 (1998).
- [13] T. E. Faber, *Fluid dynamics for physicists* (University press, Cambridge, 2001).
- [14] P. G. Saffman, *Vortex dynamics* (University press, Cambridge, 1992).
- [15] Д. Г. Ахметов, Авторефер. дис. на соиск. к.ф.-м.н. (Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО РАН, 2002).
- [16] С. В. Алексеенко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов, *Введение в теорию концентрированных вихрей* (Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, 2003).
- [17] Д. Г. Ахметов, *Вихревые кольца* (Академ. издательство "Гео", Новосибирск, 2007).

- [18] У. Юсупалиев, Физика плазмы **31**(6), 543 (2005).
- [19] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 39 (2004).
- [20] У. Юсупалиев, Дис. на соиск. к.ф.-м.н. (МГУ, М., 1988).
- [21] А. Ф. Александров, В. А. Черников, У. Юсупалиев, ТВТ **26**(4), 639 (1988).
- [22] У. Юсупалиев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 46 (2005).
- [23] У. Юсупалиев, П. У. Юсупалиев, С. А. Шутеев, Краткие сообщения по физике ФИАН, № 5, 41 (2006).
- [24] У. Юсупалиев, П. У. Юсупалиев, С. А. Шутеев, ЖТФ **77**(7), 50 (2007).
- [25] У. Юсупалиев, П. У. Юсупалиев, С. А. Шутеев, Физика плазмы **33**(3), 226 (2007).
- [26] У. Юсупалиев, С. А. Шутеев, П. У. Юсупалиев и др., Краткие сообщения по физике ФИАН, **35**(11), 45 (2008).

Поступила в редакцию 29 апреля 2010 г.